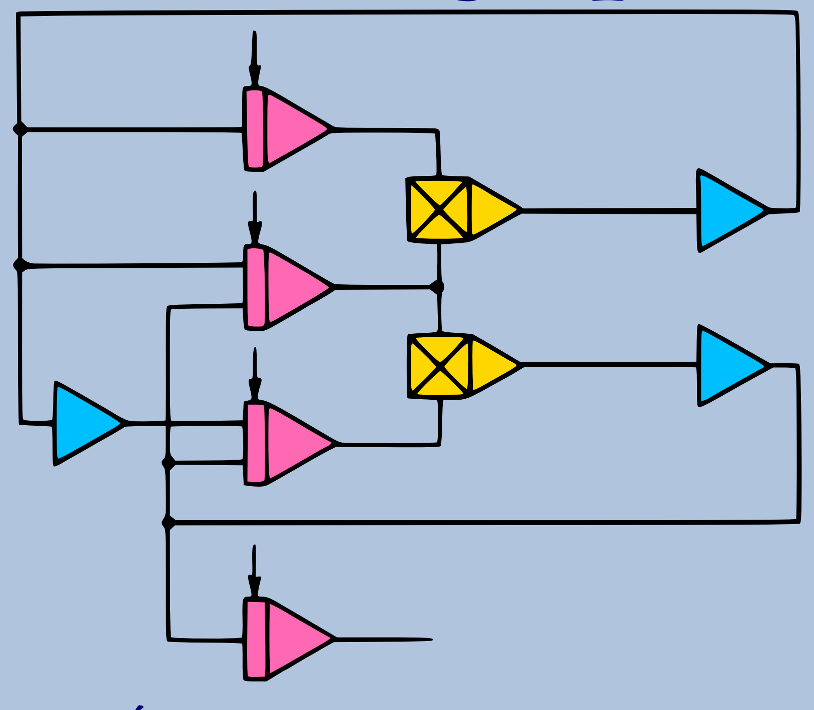
A. Ourmaev

Eléments de Simulation sur Calculateur Analogique



Éditions Mir Moscou

А. С. УРМАЕВ

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА АВМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. OURMAEV

ÉLÉMENTS DE SIMULATION SUR CALCULATEURS ANALOGIQUES

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe
par Djilali Embarek

На французском языке

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS DU RÉDACTEUR

Parmi les diverses tendances d'application de la technique du calcul au niveau du deuxième cycle il en est une qui est en passe de s'imposer aux autres. Elle est liée à la simulation sur calculateurs des processus étudiés dans les diverses disciplines scientifiques. Cette tendance n'est pas un caprice de la mode mais un impératif du temps. Chaque ingénieur se doit — s'il aspire à être un homme de science complet — de connaître l'abc des calculateurs. Mais l'implantation de ces derniers dans les instituts et universités implique une profonde réforme des méthodes et programmes et ne saurait en aucun cas se limiter à l'organisation d'un parc de machines assez développé. Les étudiants ne pourraient tirer le meilleur parti des calculateurs que s'ils ont préalablement suivi un cours de programmation qui fasse une part importante à l'usage des calculateurs tant sur le plan pratique que théorique. Les résultats les plus spectaculaires sont fournis par la simulation sur machines analogiques de processus décrits par des équations différentielles ordinaires. La simulation analogique permet une étude exhaustive et rigoureuse du phénomène considéré et offre en même temps aux étudiants la possibilité de se rompre la main dans les méthodes modernes de simulation des processus industriels.

Le présent ouvrage est le premier livre d'un cours en deux volumes dont l'objectif est de promouvoir l'utilisation des calculateurs dans la formation des spécialistes.

A l'inverse des traités traditionnels de simulation analogique, cet ouvrage n'exige du lecteur aucune connaissance d'électrotechnique, d'électronique et de théorie de la commande automatique. L'exposé repose intégralement sur le cours d'analyse du second cycle. L'esprit de cet exposé semble le mieux répondre à l'évolution actuelle des techniques de calcul. Ce qui est primordial pour l'utilisateur c'est bien plus l'aspect mathématique de l'organisation du travail de la machine et des méthodes de résolution des problèmes que son « substratum » électrono-physique.

Le premier livre revêt un caractère plus théorique. Il est composé de trois parties. La première (chapitres 1 à 3) traite du principe de

fonctionnement des calculateurs analogiques modulaires. La deuxième (chapitres 4 à 10) est consacrée aux méthodes de programmation des calculateurs analogiques. On sait que les équations différentielles données sous forme d'un problème de Cauchy sont les plus facilement réalisables sur machine. Si donc l'on a affaire à un problème d'une autre classe on lui cherchera un problème de Cauchy équivalent pour pouvoir le résoudre efficacement sur la machine. Cette réduction du problème initial à un problème de Cauchy fera l'objet de la deuxième partie. La troisième partie (chapitres 11 à 13) est d'un caractère plus appliqué.

Le deuxième livre développe les méthodes exposées dans le premier, mais appliquées à la simulation de processus concrets étudiés en mécanique théorique, physique générale, électrotechnique, chimie physique, théorie des machines et mécanismes, résistance des matériaux et dans d'autres disciplines. La structure de ces livres permet d'étudier dans un même esprit méthodologique les problèmes de simulation qui se rencontrent dans la plupart des disciplines de l'ingénieur.

Certaines méthodes de simulation sont exposées pour la première fois. Elles sont pour la plupart le fruit des travaux du séminaire scientifique organisé et dirigé par l'auteur à l'Institut de l'acier et des alliages de Moscou.

La publication de ce livre en U.R.S.S. a permis de combler dans une certaine mesure le fossé existant entre les cours traditionnels de mathématiques et de programmation d'un côté et les disciplines de l'ingénieur de l'autre.

Initialement prévu pour les « cybernéticiens », ce livre pourra être utilisé avec profit par les élèves des instituts techniques des orientations les plus diverses, les élèves de troisième cycle et les professeurs.

S. Emelianov,
membre correspondant
de l'Académie des sciences
de l'U.R.S.S.

AVANT-PROPOS DE L'AUTEUR

Ce premier livre du cours de simulation analogique est destiné aux étudiants de deuxième année des établissements d'enseignement supérieur technique en U.R.S.S.

L'objectif de ce cours est de dispenser aux étudiants les bases théoriques nécessaires à la compréhension des notions, principes et méthodes qui leur permettront d'utiliser les calculateurs analogiques dans l'étude de disciplines spéciales.

Cette orientation correspond à la plus efficace sphère d'application des calculateurs analogiques : la résolution des équations différentielles ordinaires qui constituent par excellence l'appareil mathématique d'étude dans la plupart des disciplines de l'ingénieur.

On ne saurait aspirer à l'assimilation d'un cours de simulation sans se rompre la main à résoudre des problèmes sur machine. Aussi cet ouvrage est-il émaillé d'un grand nombre de problèmes d'exercices et d'exemples résolus en détail, bien que les travaux pratiques fassent essentiellement l'objet du second livre.

Le présent ouvrage a été écrit par l'auteur à l'Institut de l'acier et des alliages de Moscou, au sein d'une équipe dirigée par S. Emelianov, membre correspondant de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., auquel l'auteur est redevable pour sa sollicitude et ses conseils qui ont joué un rôle déterminant aussi bien dans la mise au point que dans le choix des principales conceptions méthodologiques du livre.

L'auteur est profondément reconnaissant à ses collègues, les professeurs I. Bazilévitch et E. Braverman et le chargé de cours L. Rumchiski pour leurs conseils et leurs remarques au sujet du manuscrit.

L'auteur

INTRODUCTION

On distingue deux classes de calculateurs électroniques selon la représentation et le traitement de l'information.

Les machines d'un de ces types portent le nom de calculatrices numériques. L'information y est représentée sous forme de nombres donnés par une suite de chiffres, la notion de chiffre ayant ici un sens assez large. Un nombre peut être un mot d'un langage, un chiffre peut être représenté par une lettre (symbole) d'un alphabet quelconque. La notion de calcul est prise aussi dans une acception large. Le calcul sur machine numérique n'est plus simplement une exécution d'opérations arithmétiques, mais tout traitement des données initiales. Dans cet ordre d'idées, par calcul on entend également la rédaction et le traitement d'un texte, par exemple, la traduction automatique d'une langue dans une autre.

Dans les calculatrices numériques, l'information est traitée à l'aide de programmes. C'est le programme qui fait des calculatrices numériques des machines universelles. Tout domaine de l'activité de l'homme reposant sur le traitement d'une information est automatisé à l'aide des calculatrices numériques. Les calculatrices numériques sont capables de résoudre tout problème dont la solution a été programmée. Le programme est une suite finie d'opérations arithmétiques et logiques, dont l'exécution successive conduit au résultat correspondant aux conditions initiales données. Pour passer de la résolution d'un problème à un autre il suffit d'introduire dans la machine un nouveau programme avec de nouvelles données initiales. Ce faisant il n'est pas indispensable de modifier le fonctionnement des organes de la machine ou la connexion de ces organes. La structure de la calculatrice (la connexion de ses organes) est inamovible et ne dépend pas du problème à résoudre.

Les machines de l'autre type sont appelées calculateurs analogiques. Dans ces machines l'information à traiter se présente sous forme de grandeurs physiques (grandeurs analogiques) qui sont des fonctions continues du temps. Le calculateur analogique est constitué d'*opérateurs* effectuant chacun une opération mathématique.

Pour résoudre un problème il faudra donc connecter les opérateurs en fonction des opérations à effectuer. Pour passer d'un problème à un autre il faudra à chaque fois modifier les connexions des opérateurs. Contrairement à la calculatrice numérique, la structure (opérateurs et connexions) du calculateur analogique dépend du problème à résoudre. Pour cette raison les calculateurs analogiques sont des machines *spécialisées* et le procédé de traitement de l'information est dit *structurel.*

Le champ d'application des calculateurs analogiques est moins étendu que celui des calculatrices numériques. Le calculateur analogique excelle dans la résolution des équations différentielles ordinaires. L'aisance avec laquelle sont résolues ces équations a conduit ces derniers temps à la création d'un nouveau type de calculateurs *hybrides* qui sont des machines *analogo-numériques* cumulant les qualités des deux classes de machines.

Les premiers témoignages faisant état de l'utilisation de procédés analogiques dans le calcul remontent au IVe millénaire avant J.-C., à l'époque des états esclavagistes akkadosumériens de Mésopotamie. Les Babyloniens qui peuplèrent par la suite la Mésopotamie connaissaient la similitude et se servaient en agriculture d'instruments analogiques basés sur la propriété du triangle rectangle, propriété qui ne fut démontrée que mille ans plus tard par Pythagore.

Les Grecs construisirent vers l'an 80 avant J.-C. un planétarium muni d'instruments analogiques inspirés du modèle du système solaire institué par Claudius Ptolémée.

Les calculateurs analogiques en tant qu'intégrateurs furent construits et décrits pour la première fois en 1876 par les frères James Thomson et sir William Thomson (lord Kelvin). Indépendamment d'eux, l'académicien russe Krylov en 1903 et l'Américain Bush en 1931 mirent au point des analyseurs différentiels qui étaient des dispositifs d'intégration mécaniques.

Les calculateurs analogiques modernes doivent leur naissance au développement de la radioélectronique, à l'invention et au perfectionnement de l'amplificateur à courant continu.

CHAPITRE PREMIER

MACHINES ANALOGIQUES ET SIMULATION

§ 1. Introduction

La simulation est une forme particulière de l'expérience. Dans une expérience ordinaire, l'expérimentateur exerce une action immédiate sur l'objet étudié. Dans la simulation ce contact n'existe pas en ce sens que l'expérimentateur n'agit pas directement sur l'objet (l'*original*) mais sur son *modèle*. La résolution de problèmes mathématiques ou techniques sur calculateur analogique se ramène somme toute à une expérience sur un système physique conçu sciemment de telle sorte qu'il présente une équivalence mathématique avec le problème à résoudre. La résolution des problèmes sur calculateur analogique est appelée *simulation* et le calculateur analogique, *modèle*. La possibilité de créer de tels modèles tient à la similitude de la description mathématique de phénomènes de nature physique différente. Citons quelques exemples.

En mécanique on sait que la variation de l'énergie cinétique ($T = mv^2/2$) d'un corps est égale au travail des forces extérieures qui lui sont appliquées. S'agissant de la force de frottement F_{fr} qui s'oppose au déplacement de ce corps, cette loi est exprimée par l'équation

$$F_{\text{fr}} = -\frac{dT}{dx},$$

où x est le déplacement.

En physique, dans la « Chaleur », on étudie des phénomènes liés à un transfert de chaleur, autrement dit à un flux de chaleur. Un flux de chaleur g_{ch} dans la direction x est lié à la variation de la température T dans cette direction et est régi par la loi de Fourier :

$$g_{\text{ch}} = -\lambda\frac{dT}{dx},$$

où λ est le coefficient de conductibilité.

En « Electricité » la loi différentielle d'Ohm établit une relation entre la quantité d'électricité qui traverse dans l'unité de temps (le

courant i) un fil de résistance linéique ρ, et la variation de la chute de tension u dans la portion x du fil :

$$i = -\frac{1}{\rho}\frac{du}{dx}.$$

En « Cinétique » (Chimie physique), une loi fondamentale, la loi de Fick relie le transfert de matière (le flux de matière g_m) dans une direction x à la variation de la concentration C dans cette direction :

$$g_m = -D\frac{dC}{dx},$$

où D est une constante.

Toutes ces expressions présentent la même structure mathématique, alors que leur signification physique est différente. Les expressions mathématiques de même structure sont dites *isomorphes*. Elles ne se distinguent que par le contenu physique des symboles qui y figurent.

L'*isomorphisme mathématique* des divers systèmes physiques permet d'étudier certains systèmes à l'aide d'autres. En laboratoire on peut ainsi étudier des processus thermiques sur un modèle mécanique. Le choix d'un modèle mécanique pour la simulation de phénomènes thermiques présente beaucoup d'avantages, notamment la simplicité, le prix de revient modéré, la facilité des expériences, la sécurité, etc. Cependant il est très important que le modèle mathématique reproduise assez bien l'original de façon que les observations et les conclusions faites sur le comportement du modèle mécanique permettent de caractériser qualitativement et quantitativement les processus qui se déroulent dans l'original.

Le fonctionnement des machines analogiques est fondé précisément sur le principe de l'isomorphisme mathématique.

D'une façon générale, on appelle *machine analogique* tout système physique dont les grandeurs physiques continûment variables sont liées entre elles par des relations mathématiques analogues à celles du système physique étudié ou du problème mathématique posé.

§ 2. Deux types de calculateurs analogiques

On distingue actuellement deux types de calculateurs analogiques qui sont l'aboutissement d'une longue évolution historique. L'objet de simulation y est différent. Les premiers simulent, par opérations, les équations mathématiques à résoudre ; les seconds, les composantes du système physique étudié. On dit encore que les premiers réalisent une *simulation mathématique* et les seconds, une *simulation physique.*

Les calculateurs du premier groupe portent le nom de *calculateurs analogiques modulaires.* Ils sont constitués d'*opérateurs* réalisant chacun une opération mathématique bien définie : addition, multiplication, intégration, dérivation, transformation de fonctions, etc., en d'autres termes les opérateurs des calculateurs analogiques modulaires sont équivalents aux opérations mathématiques. Le schéma du calculateur sera donc constitué d'opérateurs en fonction des opérations qui sont à effectuer dans les équations. La figure 1.1, *a*

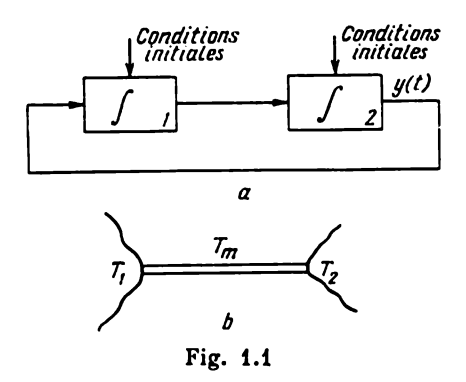


Fig. 1.1

représente un schéma comportant deux intégrateurs. L'intégrateur délivre l'intégrale de la variable introduite à son entrée, par rapport à une *variable indépendante*, dont la nature physique est liée au type du calculateur utilisé. Dans les calculateurs analogiques électroniques cette variable indépendante est le *temps.* La valeur initiale de la variable de sortie est donnée avant l'intégration, ce qu'on note à l'aide d'une flèche accompagnée de l'inscription correspondante.

Désignons par $y\ (t)$ la variable de sortie de l'intégrateur *2* et montrons que le schéma de la figure 1.1, *a* résout l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dt^2} = y$.

En effet, si à la sortie de l'intégrateur *2* on obtient la variable $y\ (t)$, c'est qu'à l'entrée (i.e. à la sortie de l'intégrateur *1*) est appliquée la variable $\frac{dy}{dt}$. Or cette variable est elle-même variable de sortie de l'intégrateur *1*, donc à l'entrée de l'intégrateur *1* on doit avoir la dérivée de $\frac{dy}{dt}$ par rapport au temps, i.e. $\frac{d^2y}{dt^2}$. Cette relation entre la sortie de l'intégrateur *2* et l'entrée de l'intégrateur *1* se traduit mathématiquement par l'égalité $\frac{d^2y}{dt^2} = y$. Les équations différentielles de ce type décrivent la distribution stationnaire de la température dans une tige homogène, placée dans un milieu de température constante T_m (fig. 1.1, *b*). Aux extrémités de la tige

la température prend les valeurs constantes T_1 et T_2. La solution générale de cette équation est $y(t) = A \operatorname{sh} t + B \operatorname{ch} t$, où A et B sont des constantes dépendant des conditions initiales ou des conditions aux limites données.

Les calculateurs analogiques du second groupe portent le nom de *modèle analogique*. Ils simulent le problème dans sa position physique en vertu de la méthode des analogies.

Dans ce type de calculateurs le modèle est fractionné non pas en opérations mathématiques, mais en éléments physiques qui sont mathématiquement isomorphes à ceux qui constituent l'objet étudié.

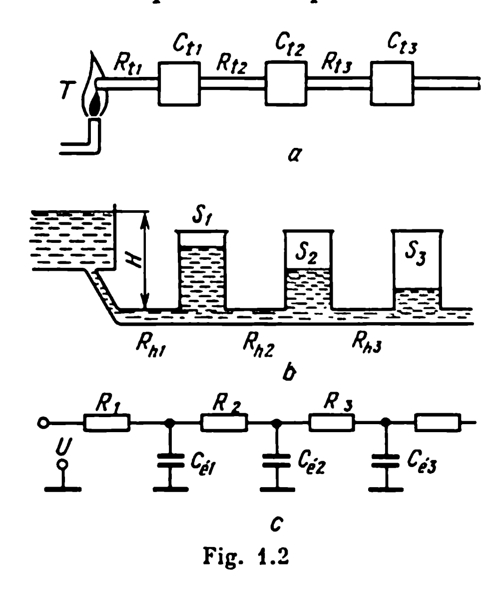


Fig. 1.2

La figure 1.2 représente un système thermique et ses analogies hydraulique et électrique. La comparaison de ces modèles montre que l'analogue de la température T est la pression hydraulique H dans le modèle hydraulique et la tension U dans le modèle électrique; l'analogue de la résistance thermique R_{t_i} est la résistance hydraulique R_{h_i} des tubes de communication et la résistance électrique $R_{é_i}$. L'analogue de la capacité thermique C_{t_i} dans a est l'aire de la section horizontale S_i des vases dans b et la capacité électrique des condensateurs $C_{éi}$ dans c.

Les modèles hydraulique et électrique du système thermique permettent d'étudier la distribution de la température dans ce dernier. Si l'on a à étudier un système thermique comprenant par exemple un nombre plus grand de résistances et capacités thermiques il suffit d'accroître le nombre des vases communicants ou des

circuits R_6C_6. Ce simple passage de la simulation d'une variante du système thermique à la simulation d'une autre variante donne l'impression d'une résolution a-mathématique du problème de la distribution de la température. Mais c'est une fausse impression. En effet l'isomorphisme mathématique de ces systèmes a été démontré *a priori* au niveau d'éléments physiques de même qu'ont été implicitement formulées les règles d'une association des éléments du modèle analogique telle que l'isomorphisme mathématique s'étende au modèle tout entier. On conserve donc une correspondance directe entre les éléments du système physique original et son modèle. Tous les éléments étudiés du système physique sont représentés dans le modèle par des éléments analogues correspondants.

Lorsqu'on résout sur un calculateur analogique modulaire des problèmes de mathématiques décrivant le comportement d'un certain système physique, on choisit généralement le schéma le plus simple d'association des opérateurs. Un tel modèle de problème représente de façon économique le comportement de l'ensemble du système original, mais dans de nombreux cas il ne reflète pas directement le comportement de chaque élément du système.

Les calculateurs analogiques modulaires sont plus universels. Les modèles analogiques sont plus spécialisés et leur structure est conditionnée par les particularités des systèmes physiques étudiés.

La résolution des problèmes sur calculateurs analogiques modulaires est précédée d'une analyse des données initiales et du choix de la méthode d'assemblage des opérateurs. Ce processus s'appelle *programmation* des calculateurs analogiques. La programmation se fixe deux objectifs.

Le premier, qui est organisationnel, consiste à établir un *système de calcul* par l'établissement de *liaisons* entre divers opérateurs. Toute liaison traduit le transfert du résultat d'une opération mathématique de la sortie d'un opérateur aux entrées d'autres opérateurs.

Le second objectif consiste à représenter les variables mathématiques initiales par des grandeurs physiques moyennant le choix d'une échelle convenable.

Le résultat de la programmation, le *programme*, est un schéma fonctionnel sur lequel les opérateurs sont représentés par des symboles et les liaisons par des lignes.

La résolution de problèmes sur calculateur analogique suit le même cheminement que l'expérience. Cette similitude apparaît particulièrement dans les méthodes de détermination du résultat final. La résolution du problème se ramène à la mesure des grandeurs physiques à l'aide d'appareils; à l'enregistrement de la variation de ces grandeurs par rapport au temps par des enregistreurs; à l'observation de la variation de ces grandeurs à l'aide d'un oscillographe spécial.

A l'heure actuelle, les calculateurs analogiques électroniques s'avèrent plus commodes pour la résolution des problèmes que leurs prédécesseurs mécaniques, en raison essentiellement de leur haute fiabilité, de leur vitesse, d'appareils électroniques modernes de mesure, d'enregistrement et de visualisation.

Dans les calculateurs analogiques modulaires, la tension du courant continu est une grandeur physique qui représente à une certaine échelle les variables du problème à résoudre. Pour cette raison la tension est appelée *variable machine*.

Les divers opérateurs sont reliés entre eux par des fils électriques qui transmettent la tension de sortie des uns aux entrées des autres.

§ 3. Questions

1. Qu'est-ce que le principe de l'équivalence mathématique des lois physiques ?
2. Quels sont les points communs entre le procédé analogique de résolution des problèmes sur calculateur analogique et l'expérience ?
3. De la règle à calcul, du compteur électrique et du posemètre, quels sont ceux qui fonctionnent suivant un principe analogique ?
4. Comparer les calculateurs analogiques modulaires et les modèles analogiques.
5. En quoi consiste la programmation des calculateurs analogiques ?
6. Définir la variable machine et expliquer comment elle est liée à la variable mathématique.

CHAPITRE 2

CALCULATEURS ANALOGIQUES MODULAIRES

§ 1. Composition et destination des organes des calculateurs analogiques

Les performances d'une machine sont caractérisées par le nombre et la nature de ses opérateurs. Plus le nombre d'opérateurs est élevé et leurs possibilités diversifiées, plus la machine est en mesure de s'attaquer aux problèmes les plus complexes, i.e. les problèmes qui comportent un très grand nombre d'opérations. Pour cette raison les calculateurs analogiques modulaires sont répartis en trois classes en fonction du nombre d'opérateurs :

première classe : *petits* calculateurs analogiques (jusqu'à 20 opérateurs),

deuxième classe : *moyens* calculateurs analogiques (entre 20 et 60 opérateurs),

troisième classe : *gros* calculateurs analogiques (plus de 60 opérateurs).

Les gros calculateurs se distinguent des autres par l'adjonction de dispositifs perfectionnés, facilitant le maniement de la machine : dispositifs de programmation numérique automatique et de contrôle, systèmes automatiques de mesure et d'enregistrement de la tension (traceurs de courbe, imprimante numérique, etc.).

Les calculateurs analogiques se partagent en *spécialisés* et *non spécialisés* ou *universels*, suivant la composition de la machine. Les calculateurs spécialisés sont destinés à la résolution d'une classe étroite de problèmes. Par la composition, le nombre et le type d'opérateurs, ainsi que par les divers dispositifs auxiliaires les calculateurs spécialisés assurent la résolution la plus efficace des problèmes de la classe spéciale correspondante. Il existe des calculateurs qui sont confinés dans la résolution d'un seul problème, bien entendu avec des données initiales différentes. Dans ces machines la connexion des opérateurs est réalisée une fois pour toutes. Ces machines trouvent leur débouché dans les divers systèmes de commande automatique d'objets et de processus.

Les calculateurs analogiques non spécialisés sont à peu de choses près constitués des mêmes opérateurs. La figure 2.1 représente un schéma des principaux organes fonctionnels.

1. Les *opérateurs* sont destinés à effectuer les opérations mathématiques.

2. Le *panneau de câblage* assure les interconnexions nécessaires des divers opérateurs par des câbles électriques terminés par des fiches monopolaires. Ces câbles sont appelés *cordons de connexion.* La connexion électrique des divers opérateurs est réalisée par l'introduction de ces fiches dans des douilles spéciales situées sur le panneau

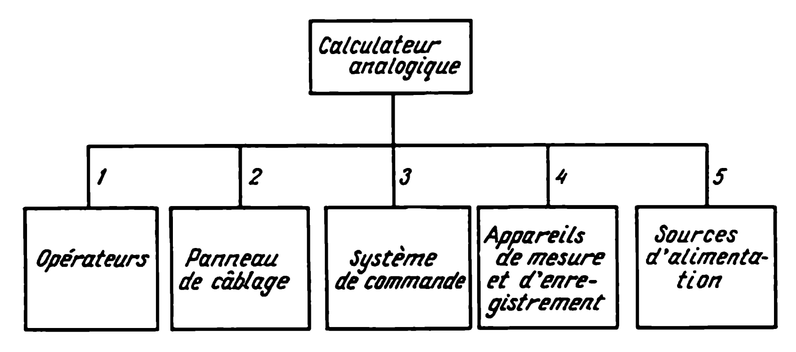


Fig. 2.1

de câblage. Dans certains calculateurs, le panneau de câblage est amovible, ce qui permet d'effectuer les commutations nécessaires à l'extérieur de la machine. Ceci autorise une utilisation plus efficace du calculateur, car on peut à la fois résoudre un problème et en composer un autre. Le panneau de câblage est rarement amovible dans les petits calculateurs.

3. Le *système de commande* sert à coordonner les organes du calculateur. Le programmeur se sert du pupitre de commande pour sélectionner l'un des quatre modes suivants :

Premier mode : *préparation.* A cette étape on règle les caractéristiques et les paramètres des opérateurs.

Deuxième mode : *résolution du problème.* Cette résolution peut être effectuée une seule fois ou reprise plusieurs fois ; cette répétition automatique est appelée *périodisation.*

Troisième mode : *interruption automatique de la résolution* à la réalisation d'une condition ou sur instruction du programmeur. Ce mode est utilisé d'habitude pour figer et mesurer les valeurs des variables machine ou pour modifier les commutations entre les opérateurs du calculateur.

Quatrième mode : *initialisation.* On se sert de ce mode pour reprendre la résolution du problème dans le cas où celle-ci se fait sans itérations.

4. Les *appareils de mesure* et *d'enregistrement* sont composés

d'instruments de mesure à aiguille du type voltmètres, des voltmètres numériques et des voltmètres enregistreurs. Ils servent à mesurer les variables machine pendant l'interruption de la résolution et pour le réglage des opérateurs à l'étape de la préparation de la machine à la résolution du problème. Les appareils de visualisation sont dans la plupart des cas constitués d'oscilloscopes à plusieurs faisceaux avec écran à fluorescence rémanente, ce qui permet d'observer simultanément un grand nombre de variables machine. On emploie souvent des oscilloscopes à cadre pour enregistrer les variations des variables machine sur des rubans spéciaux en papier photosensible.

5. Les *sources d'alimentation* servent à transformer la tension industrielle en tensions indispensables au travail de tous les organes de la machine. Les sources d'alimentation doivent fournir une tension très stable, toute variation de cette dernière étant interprétée comme une variation de la variable machine.

La figure 2.2 représente les principaux opérateurs d'un calculateur. Les sommateurs (additionneurs) effectuent l'addition des don-

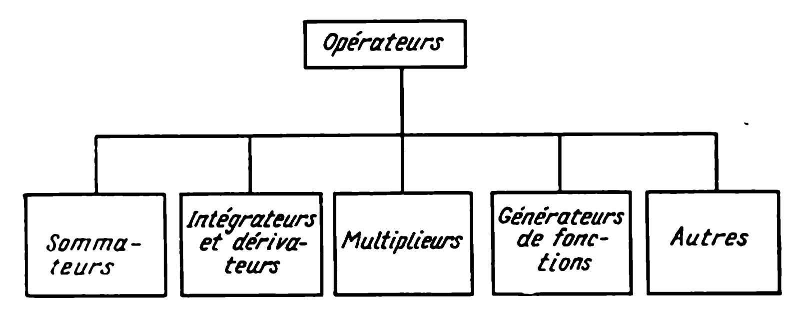


Fig. 2.2

nées d'entrée. Les *intégrateurs* et les *dérivateurs* réalisent respectivement l'intégration et la dérivation de la variable d'entrée par rapport au temps. Le *multiplieur* fait le produit de deux tensions d'entrée. Les *générateurs de fonctions* servent à produire des fonctions non linéaires. Parmi les autres opérateurs on distingue les sources de tension, les blocs de retard, les opérateurs de commande préprogrammée, les opérateurs de relais, etc. Les opérateurs sont à leur tour des appareils composés. Ils sont constitués d'éléments (résistances, condensateurs) et d'appareils (diodes, relais électromagnétiques, amplificateurs de tension).

§ 2. L'amplificateur opérationnel (AO)

L'AO est l'élément de base de la plupart des opérateurs. Il sert à amplifier la tension électrique.

Dans la suite l'AO sera représenté par le schéma de la figure 2.3, où e_g est la tension l'entrée, u_{sor} la tension de sortie, K le gain en

Fig. 2.3

tension. L'AO possède des propriétés qu'il est important de connaître lorsqu'on manipule un calculateur analogique.

1. Le gain est énorme: $K \geqslant 4 \cdot 10^4$, dans les meilleurs cas il est de l'ordre de 10^8.

2. Les tensions d'entrée et de sortie de l'AO sont de signes contraires. C'est une très importante propriété que les constructeurs cherchent délibérément à obtenir par montage d'un nombre impair d'étages d'amplification (généralement trois).

3. Le domaine de variation de la tension de sortie de l'AO est $-E_{max} \leqslant u_{sor} \leqslant E_{max}$. L'intervalle de variation des variables machine étant borné, il faut, en préparant le problème, changer l'échelle des variables mathématiques de telle sorte que les tensions électriques qui leur correspondent soient comprises dans cet intervalle. Dans $[-E_{max}, E_{max}]$ l'amplificateur possède une bonne linéarité. En dehors de cet intervalle on constate la présence de distorsions non linéaires qui introduisent des erreurs dans les opérations mathématiques. Dans les calculateurs à tubes en général $E_{max} = 100$ volts, dans les calculateurs à semi-conducteurs $E_{max} = 10$ ou 50 volts.

4. L'entrée de l'AO (le point « a ») est pratiquement mise à la masse. On veut dire par là que la tension à l'entrée de l'amplificateur est très petite et le potentiel électrique du point « a » est pratiquement confondu avec celui de la masse. Pour calculer la valeur du potentiel au point « a » on se sert de la formule $u_{sor} = -e_g K$, d'où $e_g = -\frac{u_{sor}}{K}$. Pour la valeur maximale de $u_{sor} = 100$ V et la valeur minimale de $K = 4 \cdot 10^4$, on obtient $e_g = -2{,}5$ mV.

5. L'AO est construit spécialement pour que le courant d'entrée i_g soit pratiquement nul, i.e. le premier étage n'en consomme pas. Le courant d'entrée se calcule à l'aide de la loi d'Ohm $i_g = \frac{e_g}{R_{ent}}$, il dépend de la tension d'entrée e_g qui est basse et de la résistance

d'entrée R_{ent} qui est élevée. La valeur numérique de R_{ent} est définie par la résistance de l'isolement entre les contacts d'entrée de l'AO.

6. L'AO est inertiel. Cette inertialité se traduit par le fait que la variable de sortie $u_{sor}(t)$ ne réagit qu'avec un certain retard à la variation de la variable d'entrée $e_g(t)$. Cet écart entre les variables est d'autant plus marqué que la vitesse de variation de la tension

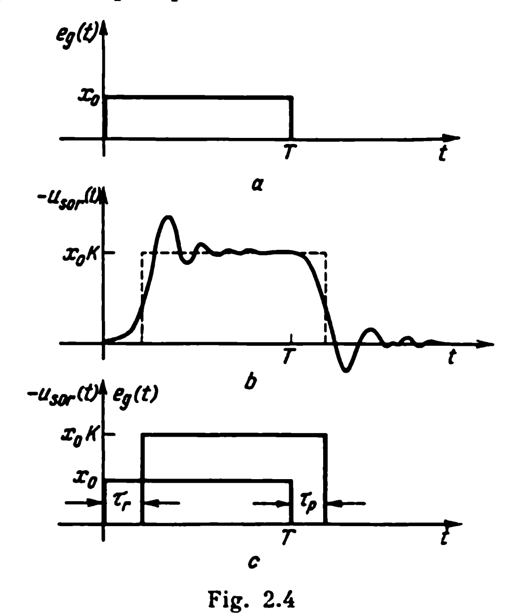


Fig. 2.4

d'entrée e_g est plus grande. La figure 2.4, *a* représente la variable d'entrée sous forme d'un échelon de tension

$$e_g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ x_0 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{pour } t > T. \end{cases}$$

La variation respective et assez typique de la tension de sortie est représentée par la courbe de la figure 2.4, *b*, d'où il ressort que la tension de sortie $-x_0K$ de l'amplificateur n'apparaît pas tout de suite, mais au bout d'un certain temps. D'autre part la forme de la variable de sortie diffère de celle de la variable d'entrée. La cause en est que la relation qui lie les variables d'entrée et de sortie, soit $u_{sor} = -e_gK$, est approchée et elle est d'autant plus exacte que $e_g(t)$ varie lentement. L'étude détaillée des processus électriques qui se déroulent dans le schéma électronique de l'AO nous conduit à une équation différentielle qui lie les variables d'entrée et de sortie.

Cette étude est l'objet de disciplines spéciales telles l'électronique appliquée ou la radiotechnique théorique. Dans la programmation des calculateurs analogiques, l'inertialité de l'AO est négligée, car l'AO est spécialement conçu pour que son inertie soit petite et n'introduise pas d'erreurs supplémentaires dans les opérations mathématiques. Mais si la vitesse de variation des variables machine est élevée, il faut tenir compte de cette inertie sous une forme ou une autre. Pour le faire avec le plus de précision, il faut considérer une équation différentielle décrivant le fonctionnement de l'AO. On peut néanmoins tenir compte de l'inertialité de l'AO d'une façon approchée en admettant qu'il est *à retard* et *à post-action*. La figure 2.4, *c* représente une approximation parfaite du fonctionnement d'un AO. La variable de sortie reproduit la forme de la variable d'entrée avec un retard τ_r. A la fin de l'application de la variable d'entrée (l'instant T) la tension de sortie se maintient pendant un temps τ_p à la sortie de l'AO. Cet intervalle de temps τ_p est appelé temps de post-action.

7. Dans la plupart des AO il existe une *tension de dérive du zéro*, i.e. une variation lente de la tension de sortie même si les bornes d'entrée de l'amplificateur sont à court-circuit (i.e. $e_g = 0$). Les variations de la tension de sortie peuvent être assimilées à une variation équivalente de la tension d'entrée, appelée dérive du zéro. La dérive a son origine dans une variation progressive de l'émissivité des tubes et de la valeur nominale des sources d'alimentation, dans les variations de la température et de l'humidité du milieu ambiant, etc. La dérive du zéro est une source d'erreurs de calcul. Il convient donc de vérifier périodiquement la dérive des amplificateurs et en cas d'écarts considérables de régler le zéro à l'aide de dispositifs spécialement prévus à cet effet. En général, dans les calculateurs de précision moyenne, la dérive du zéro ne doit pas excéder à la sortie 1-2 mV en 10 mn. Il existe des schémas d'amplificateurs opérationnels excluant toute dérive.

Il nous faut ensuite nous pencher sur les processus électriques qui ont lieu dans les opérateurs mettant en jeu des AO afin de déterminer la nature des opérations mathématiques pouvant être effectuées par les opérateurs respectifs. Pour simplifier on décrira un AO idéal. Dans la plupart des cas on admettra que l'AO possède un gain infini, qu'il est non inertiel et ne possède pas de dérive. Les erreurs introduites par cette idéalisation seront considérées séparément lorsqu'on étudiera la précision des calculateurs.

§ 3. Sommateur

Le circuit électrique de la figure 2.5, *a* effectue la sommation des tensions d'entrée multipliées par des facteurs constants. Montrons-le. Considérons les processus électriques qui ont lieu dans ce

circuit et définissons la valeur des coefficients en fonction des paramètres des éléments constitutifs.

Le circuit possède deux entrées et une sortie. Les tensions d'entrée u_1 et u_2 arrivent à l'entrée de l'AO à travers les résistances R_1 et R_2. La boucle de contre-réaction de l'amplificateur comporte la résistance $R_{c.r}$.

On dit qu'un circuit est à contre-réaction si la variable de sortie est de nouveau appliquée à son entrée. L'ensemble des éléments qui transmettent la valeur de sortie à l'entrée s'appelle *circuit de*

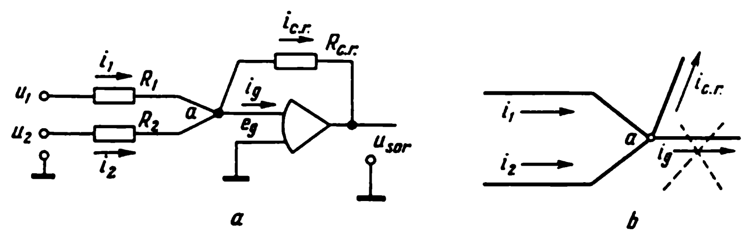


Fig. 2.5

réaction. Ici la réaction est réalisée par la résistance $R_{c.r}$. Si la variable transférée de la sortie à l'entrée du schéma accroît la valeur résultante de la variable d'entrée, la réaction est dite *positive*. Si la réaction conduit à une diminution de la valeur résultante de la variable d'entrée, on dit que la réaction est *négative* ou qu'elle est une *contre-réaction*. Dans le montage considéré, la réaction est négative à cause de la propriété d'inversion de l'AO.

Etudions plus en détail le nœud a de ce schéma. Il est représenté en gros plan sur la figure 2.5, *b*. La loi de Kirchhoff qui dit que la somme algébrique des courants entrant et sortant d'un nœud est nulle donne pour le point a: $i_{c.r} + i_g = i_1 + i_2$, où $i_{c.r}$ est le courant qui sort par la résistance de contre-réaction $R_{c.r}$; $i_g \approx 0$ le courant sortant de a et allant à l'entrée de l'AO; i_1 et i_2 les courants entrant en a respectivement par les résistances R_1 et R_2.

Appliquons la loi d'Ohm pour exprimer chaque courant en fonction de la résistance et du potentiel à ses extrémités:

$$\frac{e_g - u_{sor}}{R_{c.r}} = \frac{u_1 - e_g}{R_1} + \frac{u_2 - e_g}{R_2},$$

où $e_g = -\frac{u_{sor}}{K} \approx 0$ est la tension d'entrée de l'AO. En portant $e_g = 0$, on obtient

$$u_{sor} = -\frac{R_{c.r}}{R_1} u_1 - \frac{R_{c.r}}{R_2} u_2. \qquad (2.1)$$

En désignant $\alpha_1 = R_{c.r}/R_1$, $\alpha_2 = R_{c.r}/R_2$ on obtient

$$u_{sor} = -(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2).$$

On a donc démontré que le montage de la figure 2.5, *a* réalise la somme des variables u_1, u_2, multipliées par les coefficients constants α_1 et α_2.

Considérons maintenant un schéma plus général de sommation dans lequel le nombre d'entrées sera égal à *n*. L'équation des courants s'écrit

$$\frac{e_g - u_{sor}}{R_{c.r}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j - e_g}{R_j}. \tag{2.2}$$

Comme $e_g \approx 0$, il vient

$$u_{sor} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, \tag{2.3}$$

où $\alpha_j = R_{c.r}/R_j$ est le *coefficient de transfert pour la j-ème entrée.* On remarquera que les coefficients de transfert du sommateur sont adimensionnels et s'expriment par un quotient de résistances. Ils peuvent être exprimés également en fonction des tensions d'entrée et de sortie du sommateur. Si toutes les tensions d'entrée du sommateur sont nulles à l'exception d'une seule, soit

$$u_j = \begin{cases} 0 & j \neq m, \\ u_m \neq 0, & j = m, \end{cases}$$

la formule (2.3) devient: $u_{sor} = -\alpha u_m$, d'où il résulte

$$\alpha_m = \left| -\frac{u_{sor}}{u_{ent}} \right|.$$

Autrement dit, *le coefficient de transfert du sommateur pour une entrée quelconque est égal au module du quotient de la tension de sortie par la*

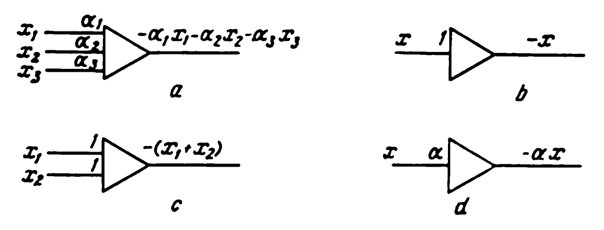


Fig. 2.6

ension d'entrée, sous réserve que toutes les autres tensions d'entrée soient nulles.

Dans les schémas fonctionnels le sommateur est représenté par un triangle. La figure 2.6, *a* montre un sommateur à trois entrées. Les coefficients de transfert sont indiqués pour chaque entrée. Le

schéma 2.6, *b* présente cette particularité que son coefficient de transfert est égal à l'unité, par conséquent il ne fait qu'inverser le signe de la variable d'entrée. Le changement de signe de la variable est si fréquent qu'on a spécialement désigné ce schéma par *inverseur*. En se servant de l'inverseur on peut toujours ramener la soustraction à l'addition. La figure 2.6, *c* montre un sommateur à deux entrées, la figure 2.6, *d* représente un schéma à une entrée effectuant la multiplication de la variable d'entrée x par un coefficient constant α; ce montage est appelé *amplificateur d'échelle*.

Tous les coefficients de transfert des montages de la figure 2.6 sont constants. Pour obtenir un coefficient de transfert arbitraire

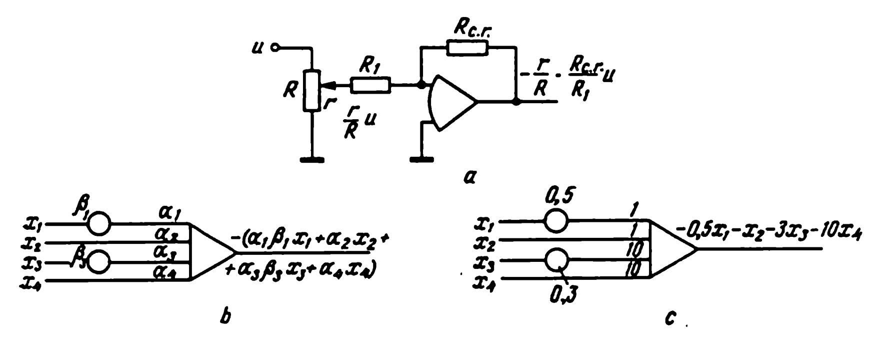


Fig. 2.7

pour une entrée quelconque on place dans celle-ci un potentiomètre comme l'indique la figure 2.7, *a*. Voyons comment fonctionne un sommateur doté d'un potentiomètre d'entrée.

La tension d'entrée est divisée par le potentiomètre dans le rapport r/R, où R est la résistance entière du potentiomètre, r la résistance comprise entre le point commun et le curseur. La tension prélevée sur le potentiomètre est la tension d'entrée pour le circuit suivant, de sorte qu'à la sortie de l'amplificateur on aura $u_{sor} = -\frac{r}{R}\frac{R_{c.r}}{R_1}u$ ou bien $u_{sor} = -\beta\alpha u$, où $\beta = r/R$ est le *coefficient de transfert du potentiomètre*. La valeur de β varie entre 0 et 1 en fonction de la position du curseur. Le coefficient général de transfert du sommateur muni d'un potentiomètre varie dans l'intervalle $0 \leqslant \alpha\beta \leqslant \alpha$.

Le potentiomètre est schématisé par un rond affecté de la valeur du coefficient de transfert. La figure 2.7 représente deux exemples de sommateur avec potentiomètre d'entrée. D'une façon générale, un sommateur à n entrées, équipées chacune d'un potentiomètre, réalise l'expression

$$u_{sor} = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j\alpha_j u_j. \qquad (2.4)$$

L'AO à boucle de réaction négative jouit d'une très importante propriété, à savoir que la somme algébrique des variables d'entrée est nulle. L'amplificateur fonctionne comme s'il résolvait une équation implicite par rapport à une variable traversant le circuit de contre-réaction de l'amplificateur en sens inverse, i. e. de la sortie vers l'entrée. Montrons comment cette propriété se manifeste dans le sommateur. Pour cela il suffit de mettre l'équation (2.1) sous la forme

$$\frac{u_{sor}}{R_{c.r}}+\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}=0. \qquad (2.5)$$

L'équation (2.5) est une somme algébrique de variables d'entrée; elle est implicite en u_{sor}.

L'amplificateur à gain élevé est utilisé comme un ensemble autonome dans les divers schémas analogiques. Il est désigné comme

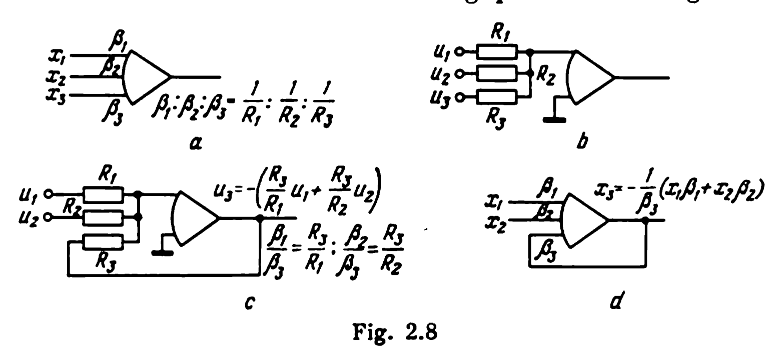


Fig. 2.8

sur la figure 2.8, *a*. Dans ces cas l'AO est employé comme un opérateur et non pas comme un composant d'un autre opérateur. En tant que tel il consiste à faire la somme des variables d'entrée, l'invertir et la multiplier par le gain K, autrement dit, c'est un amplificateur d'échelle.

La figure 2.8, *b* représente la réalisation électrique du schéma 2.8, *a*. Les coefficients β_1, β_2, et β_3 vérifient la relation suivante:

$$\beta_1:\beta_2:\beta_3=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\frac{1}{R_3}.$$

Si l'on introduit une boucle de contre-réaction comme dans la figure 2.8, *c*, on obtient un sommateur ordinaire à deux entrées dans lequel le rôle de la contre-réaction est tenu par la résistance d'entrée R_3. Les montages de ce type, où la contre-réaction utilise une des résistances d'entrée, se représentent comme sur la figure 2.8, *d*.

Il est très important de savoir établir avec assez de précision le coefficient de transfert du sommateur. Lorsque la valeur des résistances de contre-réaction et des résistances d'entrée est fixée,

l'établissement des coefficients de transfert ne présente pas de difficultés et se ramène au choix de résistances R et $R_{c.r}$ telles que ce coefficient soit égal à $R_{c.r}/R$.

Le réglage du coefficient de transfert est sensiblement compliqué par la présence d'un potentiomètre à l'entrée du sommateur. Dans ces cas on alimente le potentiomètre en une tension constante u_{ent} (de 10 ou 100 volts) et on mesure la tension à la sortie du sommateur. En déplaçant le curseur du potentiomètre on obtient la valeur $u_{sor} = -\alpha u_{ent}$, où α est le coefficient de transfert désiré.

La précision de réglage du coefficient de transfert dépend directement de celle de mesure des tensions. Les méthodes courantes de

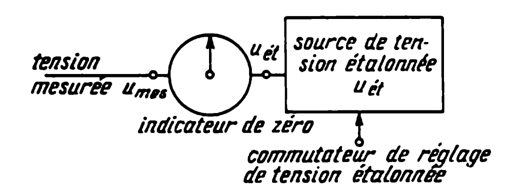


Fig. 2.9

mesure de la tension avec un voltmètre sont doublées d'une méthode de compensation plus précise. Le montage de mesure utilisé par cette méthode est composé d'une source de tension étalonnée et d'un indicateur de zéro qui peut être un galvanomètre, un voltmètre à lampes ou un oscilloscope. L'indicateur de zéro est branché entre la tension à mesurer et la sortie de la source de tension étalonnée (fig. 2.9). En tournant le commutateur de réglage de la tension étalonnée on amène l'aiguille de l'indicateur sur la position zéro, ce qui correspond à l'égalité $u_{mes} = u_{étal}$. On lit la valeur $u_{étal}$ sur l'échelle du commutateur.

§ 4. Intégrateurs

Montrons que le schéma de la figure 2.10, *a* réalise l'intégration de la tension d'entrée $u(t)$ par rapport à t, où t est le temps.

Le schéma est composé d'un AO embrassé par une boucle de contre-réaction avec un condensateur de capacité C. La variable d'entrée $u(t)$ est débitée à travers la résistance R.

Tout d'abord il y a lieu de se rappeler deux lois connues du cours d'« Electricité »:

1) la charge d'un condensateur (la quantité d'électricité Q) est directement proportionnelle à sa capacité C et à la tension u_C appliquée à ses bornes: $Q = Cu_C$;

2) l'intensité du courant est égale à la vitesse de variation de la quantité d'électricité: $i = \frac{dQ}{dt}$.

D'où il suit que l'intensité du courant passant par le condensateur C (schéma de la figure 2.10, *a*) est égale à

$$i_C = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{d\,(e_g - u_{sor})}{dt}.$$

La loi de Kirchhoff appliquée au point « *a* » permet d'écrire

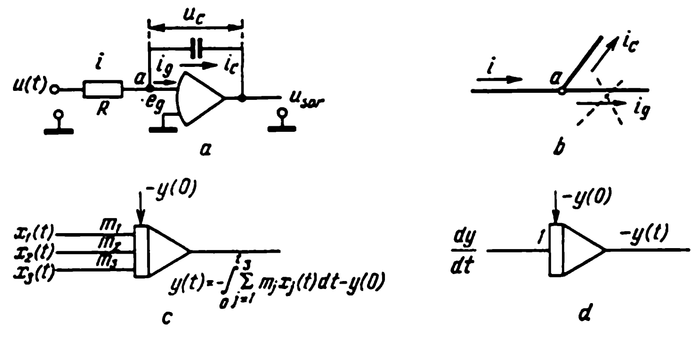


Fig. 2.10

l'équation des courants $i = i_C$ (fig. 2.10, *b*). Exprimons les courants en fonction de la tension:

$$\frac{u_{ent} - e_g}{R} = C\,\frac{d\,(e_g - u_{sor})}{dt}, \tag{2.6}$$

où $e_g = -\frac{u_{sor}}{K} \approx 0$. En portant $e_g = 0$ dans (2.6) on obtient l'équation différentielle en $u_{sor}(t)$:

$$\frac{du_{sor}(t)}{dt} = -mu_{ent}(t), \tag{2.7}$$

où $m = 1/RC$.

Comme la variable de sortie du montage de la figure 2.10, *a* est $u_{sor}(t)$ il y a intérêt à écrire l'équation (2.7) sous la forme intégrale équivalente:

$$u_{sor}(t) = -m\int_0^t u_{ent}(t)\,dt + u_0, \tag{2.8}$$

où u_0 est la constante d'intégration.

On a donc prouvé que le montage de la figure 2.10, *a* réalise effectivement l'intégration de la variable d'entrée par rapport au temps, ou ce qui revient au même, résout l'équation différentielle (2.7).

Reste maintenant à définir le sens mathématique et physique de la constante d'intégration. Pour cela considérons la valeur de la tension de sortie à la date zéro:

$$u_{sor}(0) = -m \int_0^0 u_{ent}(t)\,dt + u_0 \text{ ou encore } u_{sor}(0) = u_0.$$

Donc, mathématiquement, la constante d'intégration représente la valeur de la variable $u_{sor}(t)$ à la date zéro. Physiquement, la présence d'une tension finie à la sortie de l'amplificateur, à la date zéro, signifie que le condensateur possédait une charge u_0 avant l'intégration.

Considérons un schéma d'intégration plus général. Supposons que l'intégrateur est à n entrées recevant respectivement les tensions $u_1, u_2, \ldots, u_n$. La loi de Kirchhoff donne

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{u_j - e_g}{R_j} = C\frac{d(e_g - u_{sor})}{dt}. \tag{2.9}$$

La quantité e_g étant petite, $u_{sor}(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{du_{sor}}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{u_j(t)}{R_jC}. \tag{2.10}$$

Intégrant l'équation (2.10), on obtient

$$u_{sor}(t) = -\int_0^t \sum_{j=1}^{n} m_j u_j(t)\,dt + u_0 \tag{2.11}$$

ou, en vertu de la linéarité de l'intégrale, on peut écrire

$$u_{sor}(t) = -\sum_{j=1}^{n} m_j \int_0^t u_j(t)\,dt + u_0, \tag{2.12}$$

où $m_j = 1/R_jC$ s'appelle *coefficient de transfert de l'intégrateur pour la j-ème entrée.*

Les fourmules (2.11) et (2.12) font voir que l'intégrateur à plusieurs entrées effectue deux opérations: une sommation et une intégration. C'est pourquoi on l'appelle *sommateur intégrateur.* Sur les schémas fonctionnels on le représente comme l'indique la figure 2.10 (*c* et *d*).

Contrairement au coefficient de transfert du sommateur, le coefficient de transfert de l'intégrateur est de dimension [s^{-1}]. Ceci résulte de ce que les dimensions de R et C sont respectivement [ohm]

et [$s \cdot A \cdot V^{-1}$]. La dimension du coefficient de transfert de l'intégrateur indique qu'il existe une relation entre les valeurs des coefficients m_j et la durée de l'intégration. Le coefficient de transfert de l'intégrateur influe sur la vitesse de variation de la tension de sortie de l'intégrateur. Dans la suite nous mettrons en évidence la relation qui lie le coefficient de transfert à la durée de l'intégration lorsque nous étudierons la représentation des variables mathématiques par des variables machine.

De même que dans les montages additionneurs, on peut brancher des potentiomètres à l'entrée d'intégrateurs. Les potentiomètres

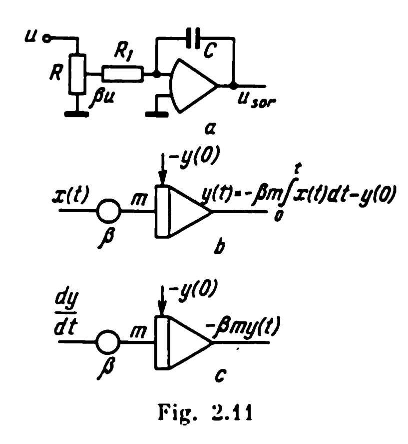


Fig. 2.11

permettent d'établir, dans un intervalle fixe, toute valeur numérique du coefficient de transfert. Si l'intégrateur comporte à son entrée un potentiomètre de rapport β, le coefficient de transfert résultant sera égal à $m\beta$ (fig. 2.11, *a*), où $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. La figure 2.11 (*b* et *c*) représente les schémas fonctionnels d'un intégrateur équipé d'un potentiomètre d'entrée.

En manipulant un calculateur il faut savoir régler les coefficients de transfert des intégrateurs, les conditions initiales d'intégration et connaître les particularités du fonctionnement de l'intégrateur suivant les objectifs qu'on se propose de réaliser. Arrêtons-nous plus en détail sur ce point.

1. Réglage des coefficients de transfert. A cette étape on procède comme pour les coefficients du sommateur. On envoie à l'entrée une tension fixe u_{ent} et par déplacement du curseur du potentiomètre on obtient à la sortie une tension $-mu_{ent}$, où m est le coefficient requis. Dans ce mode l'intégrateur se transforme automatiquement ou par l'opérateur humain en un sommateur (fig. 2.12, *a*), i.e. le condensateur de contre-réaction de l'intégrateur est remplacé par une résistance assurant les mêmes valeurs numériques aux coeffi-

cients de transfert. Ainsi un condensateur de 1μF équivaut à une résistance de 1MΩ. Si l'on ne procède pas à une telle transformation, l'intégrateur délivrera naturellement à la sortie non pas une tension constante, mais une tension linéaire croissante, représentant une

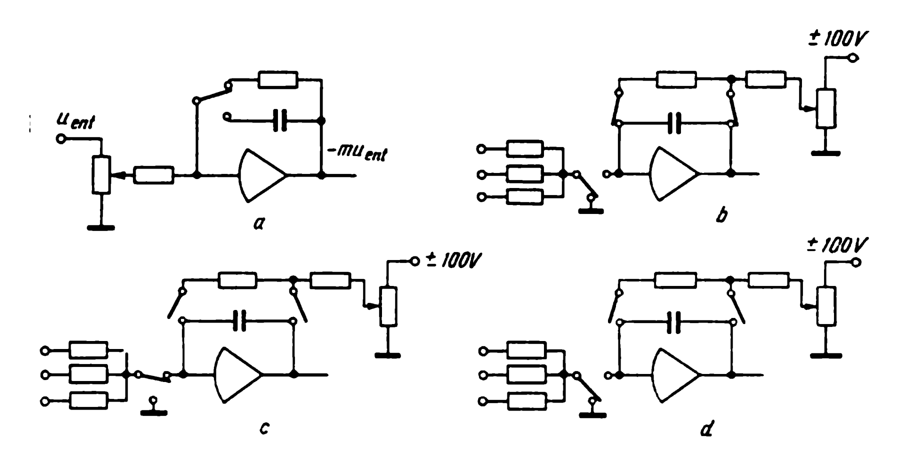


Fig. 2.12

intégrale de la variable d'entrée. Dans ces conditions il est difficile de régler le coefficient de transfert désiré.

2. **Réglage des conditions initiales (mode « état initial»).** Les conditions initiales sont définies par les potentiomètres des conditions initiales. La tension électrique délivrée par le potentiomètre respectif charge le condensateur jusqu'à la tension voulue. Pour que les autres circuits ne perturbent pas le fonctionnement de l'intégrateur on débranche toutes les résistances d'entrée avec une mise automatique à la masse de leur point commun comme l'indique la figure 2.12, *b*. Cet état porte le nom d'*état initial de l'intégrateur.*

3. **Intégration.** Elle commence par la pression du bouton-poussoir « marche ». Cette action produit un débranchement automatique des potentiomètres des conditions initiales et la mise en circuit des résistances d'entrée de l'amplificateur (fig. 2.12, *c*).

4. **Fixation des solutions.** L'intégration est interrompue au gré de l'opérateur et toutes les variables conservent les valeurs qu'elles avaient au moment de l'intervention. On fait appel à ce mode dans les cas où l'on a besoin de mesurer les variables machine ou de modifier la commutation des blocs du calculateur. En mode de fixation des solutions, les circuits d'entrée sont automatiquement déconnectés. Quant aux valeurs des tensions de sortie des intégrateurs, elles restent constantes. Le condensateur, qui reste chargé, conserve la

valeur de la variable machine (fig. 2.12, *d*). A la commande « marche » l'intégration reprend à l'endroit où elle a été gelée. A la commande « conditions initiales » les différents circuits de la machine reprennent l'état correspondant au mode « conditions initiales ».

§ 5. Exemples de description mathématique de schémas fonctionnels comportant des opérateurs linéaires

EXEMPLE 1. *La figure 2.13 (a, b, c) représente trois schémas de sommateurs. Trouver la relation qui lie la variable de sortie aux variables d'entrée.*

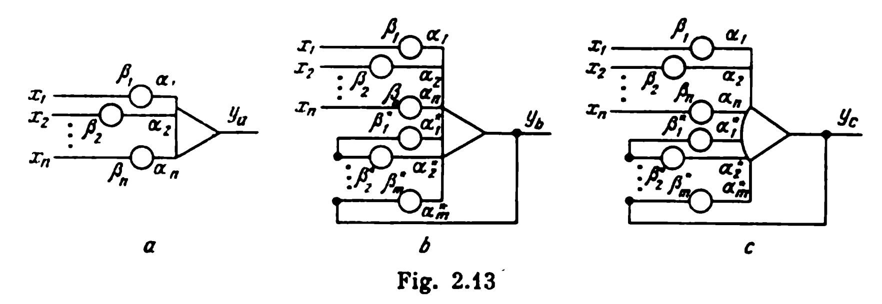


Fig. 2.13

Le schéma de la figure 2.13, *a* représente un sommateur à n entrées. Chaque entrée comporte un potentiomètre. En vertu de (2.4) la variable de sortie vaut:

$$y_a = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j x_j. \tag{2.13}$$

Le montage de la figure 2.13, *b* représente un sommateur à $n+m$ entrées. Sur les n premières entrées on applique les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les m entrées restantes sont utilisées pour établir une contre-réaction de la sortie à l'entrée du sommateur. En vertu de (2.4) la variable de sortie du sommateur est égale à

$$y_b = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j x_j - y_b \sum_{k=1}^{m} \beta_k^* \alpha_k^*.$$

En résolvant cette équation par rapport à y_b, on obtient

$$y_b = -\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j x_j}{1+\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k^* \alpha_k^*}. \tag{2.14}$$

Le schéma de la figure 2.13, *c* est celui d'un sommateur construit sur la base d'un AO à m boucles de contre-réaction embrassant m entrées du sommateur. Les autres n entrées reçoivent les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour exprimer la variable de sortie en fonction des variables d'entrée on se rappellera que l'AO à contre-réaction fonctionne comme si la somme algébrique de toutes ses variables d'entrée était nulle. On a donc

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j x_j + y_c \sum_{k=1}^{m} \beta_k^* \alpha_k^* = 0,$$

d'où

$$y_c = -\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j x_j}{\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k^* \alpha_k^*}. \qquad (2.15)$$

Les expressions (2.13), (2.14), (2.15) diffèrent l'une de l'autre uniquement par les facteurs constants. Dans la première $A_a = 1$; dans la seconde $A_b = (1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k^* \alpha_k^*)^{-1}$, et peut varier dans la plage $(1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^*)^{-1} \leqslant A_b \leqslant 1$, la limite gauche étant prise lorsque tous les $\beta_k^* = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, la limite droite lorsque tous les $\beta_k^* = 0$; dans la troisième $A_c = (\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k^* \alpha_k^*)^{-1}$ et peut varier dans l'intervalle $(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^*)^{-1} \leqslant A_c \leqslant \infty$, la limite gauche étant atteinte lorsque tous les $\beta_k^* = 1$ et la limite droite lorsque tous les $\beta_k^* = 0$.

Ces schémas suggèrent une méthode pratique importante de multiplication d'une somme par un nombre. Si la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j x_j$ est à multiplier par un facteur constant, il suffit de réaliser une contre-réaction dans le sommateur comme l'indique la figure 2.13, *b* ou *c*. Le produit de cette somme par une constante admet une interprétation physique simple. En effet, les résistances d'entrée du sommateur se trouvent branchées en dérivation sur la résistance de contre-réaction, d'où une modification de la résistance totale de

contre-réaction. Ce qui, en vertu de (2.1), équivaut mathématiquement au produit d'une somme par un nombre.

Passons maintenant aux schémas fonctionnels comprenant des sommateurs et des intégrateurs.

EXEMPLE 2. *Trouver l'équation différentielle réalisée par le schéma* 2.14, *a*.

Ce schéma est composé de quatre intégrateurs montés en série. Les grandeurs a, b, c, d, e sont des constantes. Désignons la variable de sortie de l'intégrateur *1* par $y(t)$ (fig. 2.14, *b*). L'intégrateur *2*

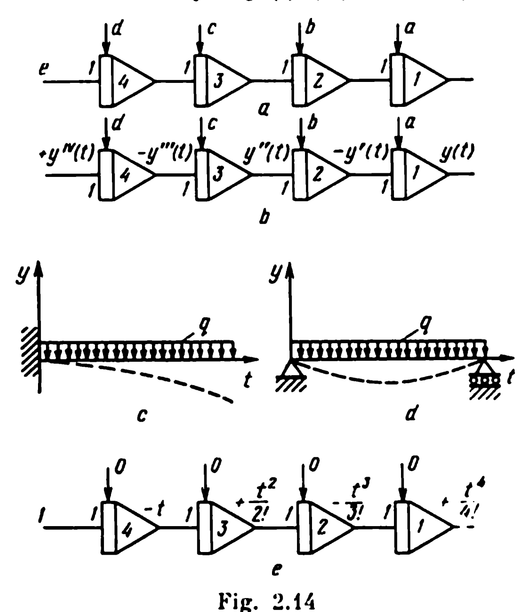


Fig. 2.14

devra donc délivrer la variable $-y'(t)$ à l'entrée de l'intégrateur *1*. De même on devra avoir à la sortie de l'intégrateur *3* la variable $+y''(t)$ et à la sortie de l'intégrateur *4* la variable $-y'''(t)$. A l'entrée de l'intégrateur *4* on doit avoir la variable $+y^{\mathrm{IV}}(t)$. Le changement de signes s'explique par l'effet inverseur de chaque intégrateur. Mais par hypothèse l'intégrateur *4* reçoit en entrée la constante e, donc $y^{\mathrm{IV}}(t) = e$, ce qui n'est autre que l'équation cherchée. En tenant compte des conditions initiales on obtient en définitive

$$y^{\mathrm{IV}}(t) = e,$$
$$y'''(0) = -d, \quad y''(0) = c, \quad y'(0) = -b, \quad y(0) = a.$$

L'équation différentielle $y^{\mathrm{IV}}(t) = e$ décrit la flexion plane d'une poutre de rigidité constante sous l'action d'une charge uniformément

répartie (fig. 2.14, *c* et *d*). La figure 2.14, *c* représente une poutre en porte-à-faux, la figure 2.14, *d* une poutre sur deux appuis. Dans le cas de la flexion plane, y correspond à la flèche de la poutre, y' à l'angle de rotation de la section de la poutre, y'' est proportionnel au moment fléchissant, y''' correspond à la force transversale et enfin y^{IV} à la charge spécifique constante q. La variable machine, le « temps », est interprétée par une variable qui représente la longueur courante de la poutre.

La solution analytique de cette équation différentielle est un polynôme du quatrième degré. Vérifions-le pour le cas où $e = 1$, $a = b = c = d = 0$ (fig. 2.14, *e*). L'intégrateur *4* reçoit à l'entrée la constante 1. A la sortie il délivrera l'intégrale de 1, i.e. $-t$. L'intégrateur *3* délivrera l'intégrale de $-t$, soit $+\frac{t^2}{2!}$; à la sortie de l'intégrateur *2* on obtiendra la variable $-\frac{t^3}{3!}$ et à la sortie de l'intégrateur *1* la variable $\frac{t^4}{4!}$. Si l'on se donne les conditions initiales correspondantes on peut en principe générer à l'aide du schéma 2.14, *e* un polynôme quelconque de degré non supérieur à quatre.

Dans le cas général *n intégrateurs montés en série génèrent n'importe quel polynôme de degré non supérieur à n sous réserve que les conditions initiales soient dûment choisies.*

Exemple 3. *Trouver l'équation différentielle réalisée dans le schéma* 2.15, *a*.

Désignons par $y(t)$ la variable de sortie de l'intégrateur *1* (fig. 2.15, *b*). On devra avoir $-y'(t)$ à l'entrée de l'intégrateur *1*, $-\frac{y'(t)}{\omega}$ à l'entrée du potentiomètre, $+\frac{y''(t)}{\omega}$ à l'entrée de l'intégrateur 2, $+\frac{y''(t)}{\omega^2}$ à la sortie de l'inverseur et $-\frac{y''(t)}{\omega^2}$ à l'entrée de l'inverseur. La dernière variable est égale à $y(t)$, puisque la variable de sortie de l'intégrateur *1* arrive directement sur l'entrée de l'inverseur *1*. D'où et compte tenu des conditions initiales, on obtient l'équation différentielle cherchée

$$y''(t) = -\omega^2 y(t),$$
$$y(0) = a, \quad y'(0) = -b\omega.$$

Cette équation décrit des oscillations harmoniques entretenues qui sont étudiées dans de nombreuses disciplines techniques. Les schémas *c*, *d*, *e* et *f* de la figure 2.15 représentent des systèmes oscillatoires de nature physique différente susceptibles d'être simulés par le schéma 2.15, *a*. La figure 2.15, *c* schématise les oscillations longitudinales d'un point matériel pesant suspendu à un ressort.

Les oscillations $y(t)$ se produisent par rapport à la position d'équilibre du point matériel. La position d'équilibre se trouve à une distance l du point de suspension du ressort. La figure 2.15, *d* montre un pendule physique, effectuant de petites oscillations $y(t)$ par rapport à la position d'équilibre. La figure 2.15, *e* illustre le mouvement d'un point matériel m sous l'action d'un centre attractif O

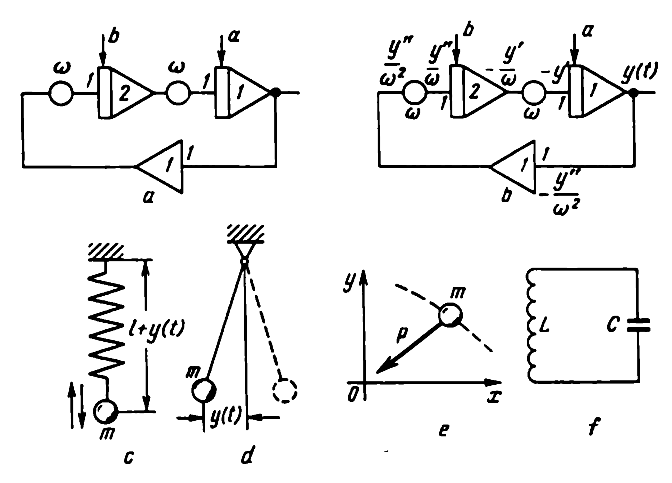


Fig. 2.15

qui exerce sur m une force d'attraction P, proportionnelle à la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ de m à O. Les variations des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point sont décrites par les équations $y''(t) = -\omega^2 y(t)$, $x''(t) = -\omega^2 x(t)$. Le schéma 2.15, *f* est celui d'un circuit oscillant composé d'une inductance L et d'un condensateur C. Le condensateur est préalablement chargé jusqu'à une certaine tension. L'équation différentielle $y''(t) = -\omega^2 y(t)$ décrit les variations dans le temps de la tension aux bornes du condensateur pendant sa décharge dans l'inductance L.

La solution générale de l'équation différentielle des oscillations harmoniques est $y(t) = -b \sin \omega t + a \cos \omega t$, où a et b sont des constantes définies par les conditions initiales.

EXEMPLE 4. *Trouver l'équation différentielle qui décrit le schéma* 2.16, *a*.

Désignons comme toujours par $y(t)$ la variable de sortie de l'intégrateur *1* (fig. 2.16, *b*). En remontant le schéma on aura à l'entrée de l'intégrateur *2* la quantité $+\frac{y''(t)}{\omega}$. Compte tenu de la contre-réaction embrassant l'intégrateur *2* et comportant un potentiomètre

de rapport 2α et de la contre-réaction qui relie la sortie de l'intégrateur *1* à l'entrée de l'intégrateur *2* à travers l'inverseur *1* et un potentiomètre de rapport ω, la quantité $\frac{y''(t)}{\omega}$ doit être égale à $-y(t)\,\omega - 2\alpha\frac{y'(t)}{\omega}$. En tenant compte des conditions initiales, on obtient l'équation différentielle cherchée :

$$y''(t) + 2\alpha y'(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$
$$y(0) = a, \quad y'(0) = -b\omega.$$

Cette équation décrit des oscillations amorties. Dans le cas du schéma 2.16, *c* l'amortissement est provoqué par la résistance du milieu

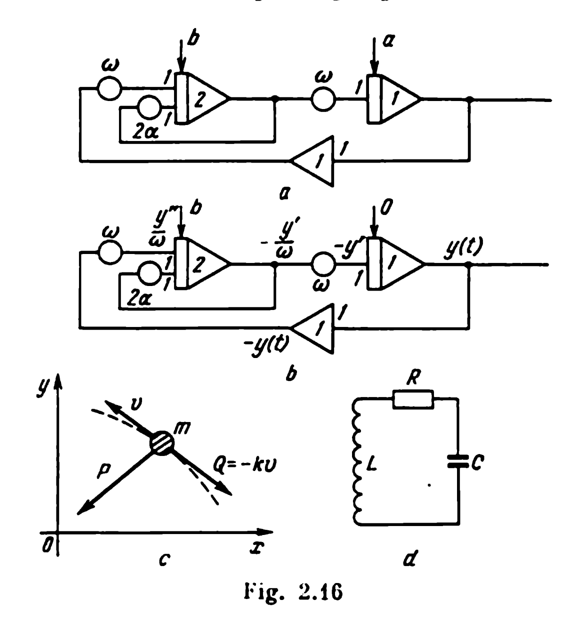


Fig. 2.16

ambiant qui s'oppose au mouvement du point matériel avec une force proportionnelle à la vitesse de ce dernier. Dans le montage de 2.16, *d* l'amortissement est dû au branchement dans le circuit d'une résistance *R* qui transforme en énergie thermique une partie de l'énergie électrique initiale du condensateur.

La solution générale de l'équation différentielle des oscillations harmoniques amorties s'écrit $y(t) = A\exp(-\alpha t)\sin(\omega_1 t + \psi_0)$, où $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ $(\alpha < \omega)$, A et ψ_0 sont des constantes définies par les conditions initiales.

§ 6. Bloc (circuit) de commande préprogrammée

Le schéma 2.17 s'appelle *circuit de commande préprogrammée.* Il est composé d'un AO à contre-réaction à travers la diode *D*. La charge de l'AO est constituée par l'enroulement d'un relais, dont

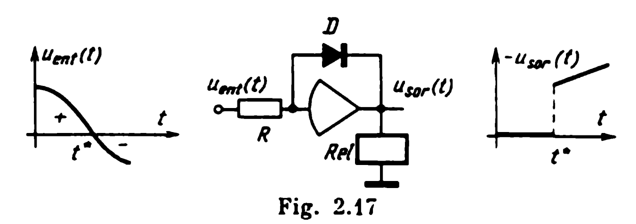


Fig. 2.17

les contacts se trouvent dans le système de commande de la machine et aboutissent au panneau de câblage.

Examinons le fonctionnement du schéma. La tension de sortie de l'AO est donnée par l'expression $u_{sor}(t) = -\frac{R_d}{R} u_{ent}(t)$, où R_d est la résistance de la diode. Or R_d prend une valeur différente selon que la diode est ouverte ou fermée par la tension qui lui est appliquée. Ici, tant que la tension d'entrée est positive, la diode est ouverte et sa résistance est petite. Après la date t^* à laquelle la tension d'entrée devient négative, la diode se ferme et sa résistance devient très grande. Donc, à la sortie de l'AO, avant la date t^*, la tension est pratiquement nulle; à l'instant t^* elle subit un saut, dont l'amplitude est limitée par la résistance de l'enroulement de relais monté en parallèle avec la diode (l'entrée de l'AO est à la masse). Dès qu'il y a saut, le relais fonctionne, ce qui se traduit par une fermeture des contacts normalement ouverts et une ouverture des contacts de repos.

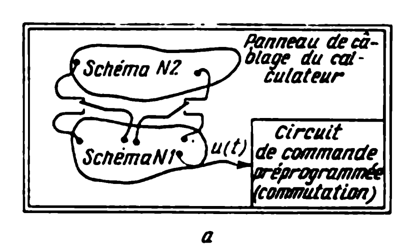
Le mode de fonctionnement du circuit de commande préprogrammée dépend du groupe de contacts utilisés. Les contacts du relais qui se trouvent dans le système de commande du calculateur peuvent servir à stopper automatiquement la machine ou comme on dit à interrompre la résolution du problème. Les contacts du relais du panneau de câblage peuvent servir à modifier automatiquement le schéma de commutation.

Définissons ce qu'on entend d'ordinaire par modification automatique du schéma de commutation. Supposons que sur le panneau de câblage on ait réalisé un montage composé des schémas n° 1 et n° 2 (fig. 2.18, *a*). L'une des variables machine $u(t)$ est délivrée par le schéma n° 1 et accède à l'entrée du circuit de commande préprogrammée. Les schémas n° 1 et n° 2 sont reliés par les contacts du relais *Rel*. Ces contacts sont fermés ou ouverts selon le signe de la

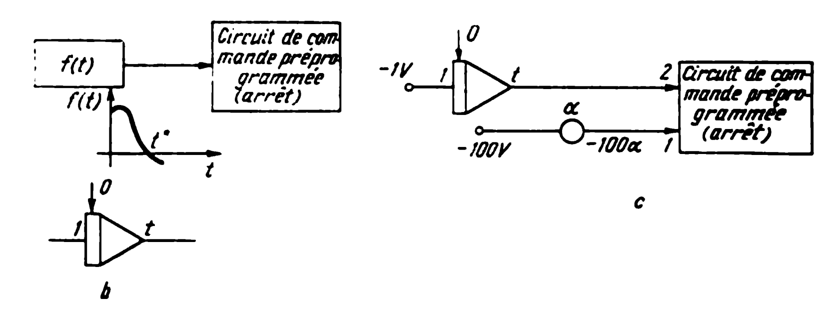
variable $u(t)$. Donc les schémas n° 1 et n° 2 fonctionnent ensemble ou séparément en fonction du signe de la variable $u(t)$.

Lorsque la structure d'un schéma varie automatiquement suivant qu'est réalisée ou non une condition particulière, on dit qu'on a un *système à structure variable*. Le circuit de commande préprogrammée, mis au mode de commutation, sert de base à la construction de systèmes à structure variable.

Si la polarité de la diode dans le circuit de commande préprogrammée est inversée, le saut de tension à la sortie de l'AO aura lieu à l'instant où la tension d'entrée devient positive.



a



b c

Fig. 2.18

Pour un nombre d'entrées du circuit de commande préprogrammée égal à n, la réponse du schéma se produit à l'instant où la somme $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} u_j(t)$ change de signe, R_j étant la j-ème résistance d'entrée.

Montrons comment la propriété du circuit de commande préprogrammée d'interrompre le fonctionnement de la machine s'applique à la résolution d'équations algébriques et transcendantes. La figure 2.18, *b* représente un montage composé d'un opérateur générant une fonction arbitraire $f(t)$, d'un circuit de commande préprogrammée et d'un intégrateur délivrant une tension numériquement égale au temps de marche de la machine. A la date t^*, où $f(t)$

passe par la valeur zéro, la génération de la fonction $f(t)$ est interrompue et la tension délivrée par l'intégrateur est égale à la racine de l'équation $f(t) = 0$.

Le circuit de commande préprogrammée est souvent utilisé pour réaliser des montages qui permettent d'interrompre la résolution du problème à un instant donné à priori afin de geler les valeurs des variables machine. Le montage de la figure 2.18, *c* comporte un intégrateur délivrant la tension $+t$, un diviseur de tension potentiométrique symbolisé par un rond, un circuit de commande préprogrammée qui devra opérer l'arrêt. Supposons que le rapport du

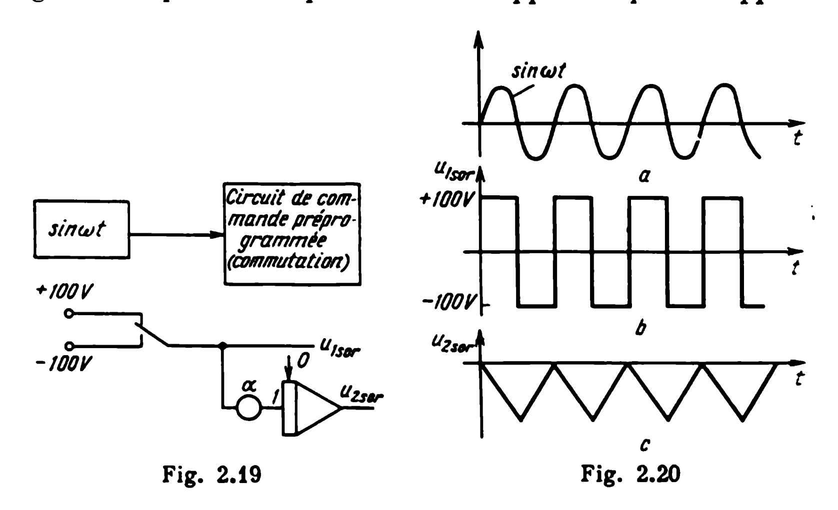


Fig. 2.19 Fig. 2.20

diviseur est $\alpha = 0{,}1$; le diviseur fournit alors une tension de -10 V à l'entrée *1* du circuit de commande préprogrammée. L'entrée *2* de ce circuit reçoit la tension $+t$. L'arrêt de la machine est automatique dès que $-10 + t^* = 0$. Ainsi, en faisant varier le rapport α, on peut arrêter la machine à un instant t quelconque qui peut atteindre 100 s. On aura alors résolu l'équation linéaire algébrique $-100\alpha + t = 0$ par rapport à t.

Appliquons maintenant le circuit de commande préprogrammée, mis au mode de commutation, à la génération de fonctions présentant des discontinuités de première espèce et de fonctions dérivables par morceaux. Le schéma est représenté par la figure 2.19. Le générateur de la fonction sin ωt est relié au circuit de commande préprogrammée qui réalise la commutation. Sur deux contacts du relais on applique une tension de 100 et de -100 *V*. Le contact central adhère normalement au contact supérieur et s'écarte du contact inférieur. La tension à ce contact est désignée par u_{1sor}. Cette tension est appliquée à l'entrée de l'intégrateur qui délivre en sortie la

tension u_{2sor}. Décrivons le fonctionnement du schéma. L'enroulement du relais est mis hors tension le temps d'une demi-période positive de la fonction sin ωt (fig. 2.20, *a*). Donc la tension de +100 V est présente sur le contact central qui adhère du repos au contact supérieur et u_{1sor} = 100 V. Le temps d'une demi-période négative l'enroulement de relais est parcouru par le courant, le contact inférieur normalement ouvert est fermé et u_{2sor} = 100 V (fig. 2.20, *b*). Donc le montage 2.19 a généré à partir de la fonction sin ωt une fonction périodique : une onde rectangulaire qui présente des discontinuités de première espèce aux zéros de la fonction sin ωt. L'intégration de l'onde rectangulaire donne une fonction périodique, dérivable par morceaux, dont le graphe est constitué de triangles (fig. 2.20, *c*).

§ 7. Générateurs de fonctions non linéaires

Les *générateurs de fonctions* sont des opérateurs aptes à générer une relation fonctionnelle explicite $y = f(x, z)$. Dans la plupart des calculateurs, les générateurs de fonctions ne produisent que des fonctions d'une variable : $y = f(x,)$ en raison des difficultés pratiques entraînées par la construction des générateurs à plusieurs variables. Les générateurs de fonctions sont désignés comme sur

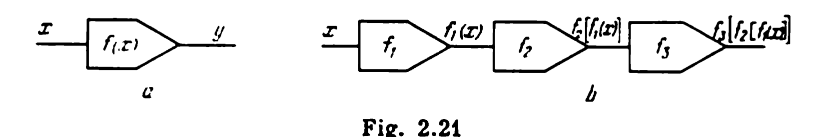


Fig. 2.21

la figure 2.21, *a*. La tension d'entrée est une variable, la tension de sortie, la valeur d'une fonction. Le domaine de variation des tensions d'entrée et de sortie varie, comme toujours dans les calculateurs à tubes électroniques, dans la plage ±100 V, ce qui impose certaines restrictions à la classe des fonctions générées. Ce sont des fonctions univoques de leur argument avec domaines de définition et de valeurs bornés. Les fonctions obtenues ne sont qu'approchées. Les erreurs d'approximation tiennent à deux causes : l'erreur d'approximation de la fonction initiale et la précision technologique de fabrication des éléments constituant le générateur.

La nécessité d'approcher la dépendance fonctionnelle initiale est due au fait que la plupart des générateurs fonctionnels sont capables en principe de produire non pas la fonction elle-même mais seulement son approximation linéaire par morceaux. La précision de cette approximation dépend de la courbure de la fonction et du nombre des éventuels intervalles d'approximation linéaire. Le nombre d'intervalles dépend à son tour de la construction des blocs. En général

les calculateurs comprennent une grande variété de générateurs de fonctions. Dans la notice d'emploi de chaque calculateur, on décrit le principe de fonctionnement, les méthodes de réglage et de connexion des générateurs de fonctions.

Un générateur de fonction est *universel* si moyennant un ajustage adéquat on peut l'utiliser à la génération de toute dépendance fonctionnelle.

Un générateur de fonction est *spécialisé* s'il est réglé une fois pour toutes pour la génération d'une dépendance fonctionnelle donnée.

Si l'on dispose de plusieurs générateurs fonctionnels réalisant les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, etc., en modifiant leurs connexions on obtient d'autres fonctions, parfois bien plus difficiles à reproduire. Le schéma le plus simple de connexion des générateurs consiste à les monter en série. A la sortie est délivrée la superposition des fonctions en question (fig. 2.21, *b*).

§ 8. Multiplieurs

Le multiplieur des variables d'entrée x et y doit délivrer leur produit $z = xy$. Théoriquement le multiplieur peut être imaginé sous la forme d'un générateur fonctionnel de deux variables d'entrée. Mais vu les difficultés soulevées par la construction de générateurs de plusieurs variables, on opte pour une autre solution : on ramène la multiplication à d'autres opérations facilement réalisables par les sommateurs et les générateurs fonctionnels d'une variable d'entrée. Ainsi dans la plupart des petits et moyens calculateurs, les multiplieurs sont construits suivant l'une ou l'autre des identités :

$$xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2],$$

$$xy = \frac{1}{2}[(x+y)^2-x^2-y^2].$$

Pour réaliser la multiplication il faut donc des sommateurs et des générateurs de fonctions qui élèvent la variable d'entrée au carré.

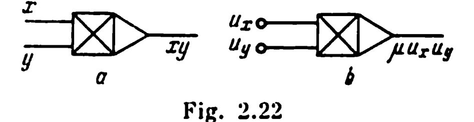


Fig. 2.22

Le multiplieur est représenté comme sur la figure 2.22, *a*. Quand on veut souligner la nature électrique des variables d'entrée, on le représente comme sur la figure 2.22, *b*. A l'entrée du schéma sont appliquées les tensions u_x et u_y correspondant aux variables x et y.

A la sortie on obtient une tension $\mu u_x u_y$ proportionnelle à leur produit. Le coefficient de proportionnalité μ est appelé facteur d'échelle du multiplieur. En général $\mu = 0{,}01$ dans les machines à tubes, si bien que pour les valeurs maximales $u_x = u_y = 100$ V, le produit $\mu u_x u_y$ est compris dans l'intervalle admissible ± 100 V.

§ 9. Inversion des fonctions, division et extraction d'une racine carrée

Supposons que les variables x et y sont liées entre elles par une équation de la forme

$$F(x, y) = 0. \tag{2.16}$$

Si entre x et y il existe une correspondance biunivoque et que $F'_y(x, y) \neq 0$, on dit que l'équation (2.16) définit y comme une fonction implicite univoque de l'argument x. De façon analogue, si $F'_x(x, y) \neq 0$, l'équation (2.16) définit x comme une fonction implicite univoque de l'argument y.

Si les opérateurs du calculateur sont susceptibles de générer une fonction $z = F(x, y)$, l'équation implicite (2.16) peut toujours être résolue sur machine par rapport à $y = f(x)$ ou à $x = \varphi(y)$ par la *méthode des fonctions implicites*.

Cette méthode consiste à passer de l'équation (2.16) à une équation différentielle. Si l'on veut connaître la valeur de y^* pour x^* donné, i.e. $y^* = f(x^*)$, on se sert de l'équation différentielle

$$y'(t) = -\rho F(x, y) \operatorname{sign}[F'_y(x, y)] \tag{2.17}$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$, où ρ est un coefficient assez grand ; t le temps ; $y'(t)$ la dérivée de $y(t)$ par rapport à t.

Les raisonnements suivants nous permettent également de passer de l'équation implicite (2.16) à l'équation différentielle (2.17). Si pour $x = x^* = \text{const}$ la solution $y(t)$ de l'équation (2.17) tend vers une valeur constante y^* lorsque $t \to \infty$, alors y^* est la valeur cherchée : $y^* = f(x^*)$. En effet, si $y(t) \to y^*$ lorsque $t \to \infty$, alors $y'(t) \to 0$. Donc l'équation (2.17) se transforme en l'équation $F(x^*, y^*) = 0$.

Pour accélérer la convergence de $y(t)$ vers y^* on introduit un facteur constant ρ au second membre de (2.17). Cette méthode sera justifiée plus rigoureusement au § 2 du chapitre 10.

Lorsqu'on câble l'équation (2.17), l'intégrateur est un AO dont la boucle de contre-réaction comprend un condensateur (voir fig. 2.23, *a*), le coefficient constant ρ étant $1/RC$. Les valeurs numériques de R et C sont d'ordinaire choisies assez petites pour que ρ soit voisin du gain K de l'AO. Dans la suite on supposera que $\rho = K$. L'intégrateur en question est embrassé par un circuit de contre-réaction qui comporte le générateur de la fonction $F(x, y)$. Pour

que la réaction soit toujours négative, il faut tenir compte de sign$[F'_y(x, y)]$.

Le montage de la figure 2.23, *b* correspond au cas $F'_y(x, y) > 0$, celui de la figure 2.23, *c*, à $F'_y(x, y) < 0$. Le montage doit admettre

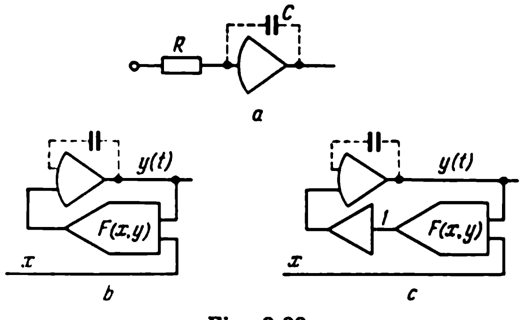


Fig. 2.23

des commutations dans les cas où la fonction $F'_y(x, y)$ n'est pas de signe constant dans son intervalle de définition. Ce type de montage est montré sur la figure 2.24. La partie supérieure est une réunion des montages 2.23, *b* et *c*. La connexion est réalisée à l'aide des

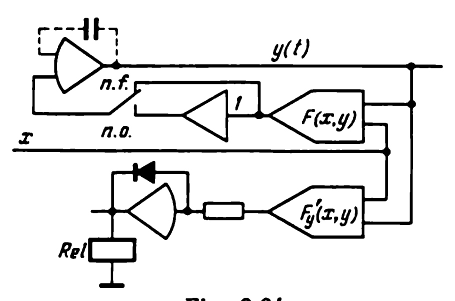


Fig. 2.24

contacts du relais *Rel* du circuit de commande préprogrammée. Le fonctionnement du montage est assuré par le contact normalement fermé lorsque $F'_y(x, y) > 0$ et respectivement par le contact normalement ouvert lorsque $F'_y(x, y) < 0$. La partie inférieure est constituée du circuit de commande préprogrammée mis au mode de commutation. Le circuit reçoit en entrée la variable $F'_y(x, y)$ à partir du générateur de fonction correspondant.

La méthode des fonctions implicites est bien adaptée à l'*inversion des fonctions*. Cela veut dire que si l'on dispose par exemple de générateurs des fonctions $y = \exp x$, $y = x^n$, $y = \sin x$, cette

méthode permet toujours, moyennant une connexion convenable, d'obtenir les fonctions inverses $x = \ln y$, $x = \sqrt[n]{y}$, $x = \arcsin y$. Considérons le problème de l'inversion dans le cas général. Etant donné un générateur de la fonction $y = f(x)$, on demande la fonction inverse $x = \varphi(y)$. Mettons la fonction donnée sous forme de l'équation implicite

$$F(x, y) = f(x) - y = 0$$

et résolvons cette dernière par rapport à x. Il faut trouver par la méthode des fonctions implicites la solution de l'équation différentielle

$$x' = -K[f(x) - y] \operatorname{sign}[f'_x(x)]$$

qui vérifie la condition initiale $x(0) = 0$. Les schémas 2.25, *a* et *b* correspondent respectivement aux cas $f'_x(x) > 0$ et $f'_x(x) < 0$. Il est clair que pour inverser la fonction $y = f(x)$ il faut brancher le générateur de $f(x)$ dans le circuit de contre-réaction de l'AO.

D'une façon analogue on peut effectuer d'autres inversions à l'aide de la méthode des fonctions implicites. Vu que la plupart

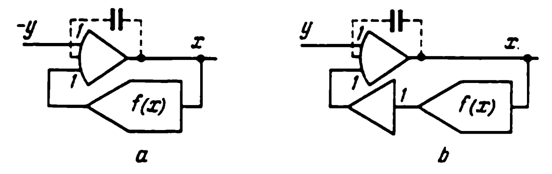


Fig. 2.25

des petits calculateurs ne comportent pas d'opérateurs spéciaux pour la division, le calcul du quotient $z = x/y$ se ramène à la résolution de l'équation implicite $F(z) = zy - x = 0$ par rapport à z. La méthode des fonctions implicites suggère de réaliser un montage qui donne la solution de l'équation différentielle

$$z' = -K[zy - x] \operatorname{sign} y, \; z(0) = 0,$$

où, si y est positif,

$$z' = -K[zy - x], \; z(0) = 0.$$

Le schéma fonctionnel correspondant est représenté sur la figure 2.26, *a*, où l'on remarque que la division se ramène à une multiplication à l'aide d'un multiplieur branché dans le circuit de contre-réaction de l'AO. Le schéma ne délivre pas le quotient $z = x/y$ immédiatement, mais au bout d'un certain temps. Ce retard existe même si x et y sont des constantes. En effet, en résolvant analyti-

quement la dernière équation différentielle et en supposant x et y constants, on aura $z(t) = \frac{x}{y}[1 - \exp(-Kyt)]$. Le retard qui est d'environ $\frac{4}{Ky}$ secondes est inversement proportionnel au gain K de l'AO.

Si la variable y est négative, le montage de la figure 2.26, *a* doit être modifié. Si le signe de la variable y est inconnu, le schéma doit prévoir les commutations nécessaires.

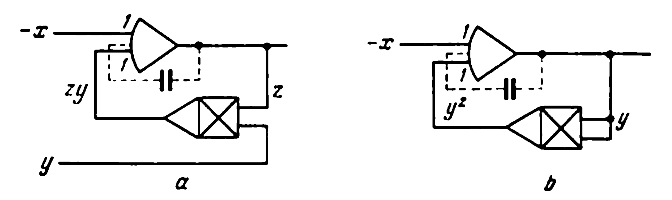


Fig. 2.26

On aura profit à ramener l'extraction d'une racine carrée à la résolution d'une équation implicite. Soit à réaliser la fonction $y = \sqrt{x}$. Cela revient à résoudre l'équation implicite $F(y) = y^2 - x = 0$ par rapport à y, c'est-à-dire à réaliser l'équation différentielle

$$y' = -K[y^2 - x], \quad y(0) = 0,$$

à laquelle correspond le schéma de la figure 2.26, *b*.

§ 10. Quelques opérateurs à diodes

Les diodes se comportent comme des conducteurs unidirectionnels, puisqu'elles ne laissent passer le courant que lorsque l'anode est positive. Cette propriété est utilisée dans les divers schémas logiques aussi bien dans les calculateurs numériques qu'analogiques; citons à titre d'exemple les limiteurs d'amplitude, les schémas à fonctionnement de relais, les formateurs de module d'une fonction, les schémas-portes pour les valeurs maximales et minimales d'une grandeur, etc.

1. Limiteur d'amplitude. Le schéma de limitation de la plage de variation de la variable machine est représenté par la figure 2.27, *a*. La courbe donnant u_{sor} en fonction de u_{ent} s'appelle *caractéristique entrée-sortie*. Celle-ci est représentée sur la figure 2.27, *b*. Le montage se compose d'un amplificateur d'échelle à deux boucles de contre-réaction par les potentiomètres r_1 et r_2 et les diodes D_1 et D_2.

Montrons que le schéma possède la caractéristique de la figure 2.27, *b*. Supposons que la tension d'entrée $u_{ent} = 0$; donc $u_{sor} = 0$. En déplaçant les curseurs des potentiomètres on établit sur r_1 la tension u_{D1} et sur r_2 la tension $-u_{D2}$. Les diodes D_1 et D_2 sont

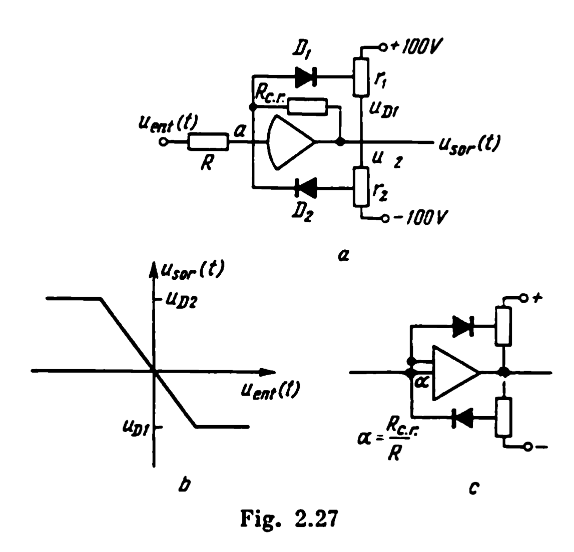


Fig. 2.27

bloquées par ces tensions, puisque le point « a » est à la masse indépendamment de la valeur de la tension d'entrée. L'expression de u_{sor} en fonction de u_{ent} est

$$u_{sor} = -\frac{R_{c.r}}{R} u_{ent},$$

c'est l'équation d'une droite.

Si u_{ent} croît, u_{sor} décroît. La tension qui ferme la diode D_1 décroît. A l'instant même où u_{sor} prend la valeur u_{D1} la tension de blocage s'annule. La diode D_1 s'ouvre et shunte $R_{c.r}$ par sa petite résistance, de sorte que u_{sor} ne varie plus, bien que u_{ent} continue à augmenter. A ce régime de fonctionnement correspond la partie horizontale de la caractéristique.

Si u_{ent} décroît, u_{sor} croît alors jusqu'à la valeur u_{D2} qui ouvre la diode D_2 et ensuite ne varie plus. Ce régime est représenté par la partie horizontale supérieure de la caractéristique.

Le limiteur d'amplitude se représente comme sur la figure 2.27, *c*.

2. Schéma à fonctionnement de relais. Ce montage s'obtient à partir du limiteur d'amplitude par élimination de la résistance de contre-réaction $R_{c.r}$ (fig. 2.28, *a*). Formellement l'élimination de la contre-réaction équivaut à poser $R_{c.r} = \infty$. Graphiquement cela

veut dire que la partie oblique de la caractéristique devient verticale (fig. 2.28, *b*). On voit à l'allure de la caractéristique que le schéma réagit au signe de la tension d'entrée

$$u_{sor} = \begin{cases} u_{D2} \text{ si } u_{ent} < 0, \\ u_{D1} \text{ si } u_{ent} > 0. \end{cases}$$

Ce schéma porte le nom de *relais parfait* (électronique) ou de schéma *à fonctionnement de relais* contrairement au circuit de commande

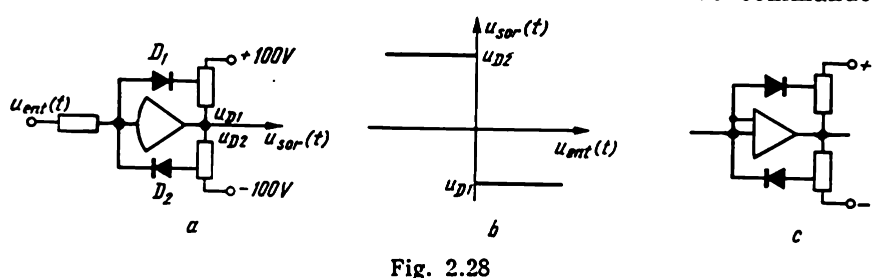


Fig. 2.28

préprogrammée (mode de commutation) que l'on appelle schéma à relais à contact.

Dans les schémas fonctionnels et de commutation, on représente le relais électronique comme l'indique la figure 2.28, *c*.

Dans les relais électroniques et les limiteurs d'amplitude les limites sont susceptibles de varier entre 0 et 100 V en fonction de la position du curseur du potentiomètre.

3. Schéma-porte pour les valeurs maximale et minimale d'une grandeur. Etant donnée une collection de fonctions $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t)$, on demande celle qui est maximale ou minimale à un instant donné.

Cette opération se formule comme suit :

$$y_{max}(t) = \max\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t)\},$$
$$y_{min}(t) = \min\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t)\}.$$

Il est clair que $y(t)$ n'est pas toujours forcément confondue avec l'une des fonctions de l'accolade sur tout intervalle de définition de t. La figure 2.29, *a* montre à titre d'illustration une collection de cinq fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ représentées par des droites. Les valeurs maximales et minimales ont été mises en évidence sur l'intervalle $t \in [0, 1]$. On voit que le graphe de $y_{min}(t)$ est une ligne polygonale constituée de cinq segments, et celui de $y_{max}(t)$ une ligne polygonale de deux segments.

La figure 2.29, *b* et *d* représente les circuits électriques des opérateurs à diodes délivrant respectivement les valeurs maximales et minimales. Les quantités $-E$ et $+E$ sont choisies telles que $|-E| = +E > u_j$, où $j = 1, 2, \ldots, n$.

L'opérateur de la figure 2.29, *b* délivre

$$u_{sor} = \max(u_1, u_2, \ldots, u_n, -E) = \max(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

En effet, des n diodes d'entrée seule est ouverte celle qui reçoit la plus grande tension. Pour fixer les idées supposons que c'est la k-ème. Alors $u_k > u_j$ pour tous les $j \neq k$ et $u_{sor} = \frac{R}{R+R_{D\,dir}} u_k \approx \approx u_k$, puisque la résistance directe de la diode $R_{D\,dir} \leqslant R$. Toutes

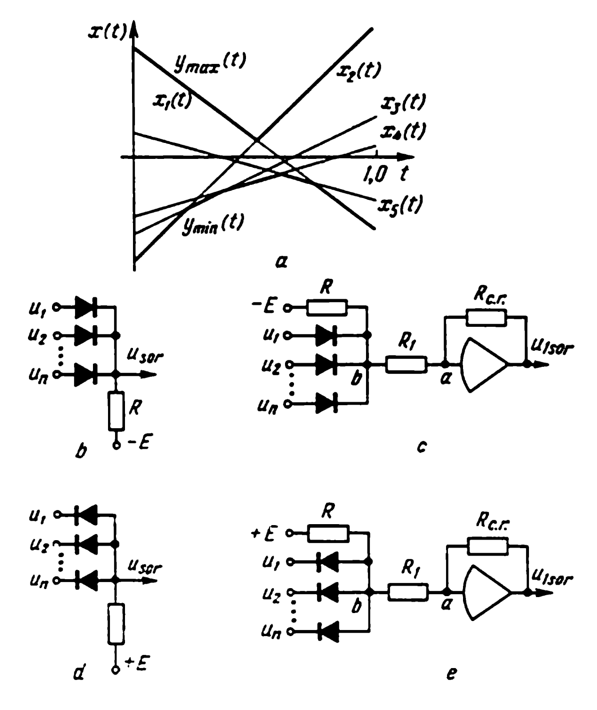


Fig. 2.29

les autres diodes sont fermées par la tension $u_k - u_j$. Si l'on relie la sortie du montage de la figure 2.29, *b* à l'entrée de l'amplificateur d'échelle comme l'indique la figure 2.29, *c* on obtient alors

$$u_{1sor} = -\frac{R_{c.\,r}}{R_1} \max\left\{ u_1, u_2, \ldots, u_n, -\frac{R_1}{R_1+R} E \right\}.$$

Par des raisonnements analogues on démontrerait que les opérateurs de la figure 2.29, *d* et *e* réalisent respectivement les expressions

$$u_{sor} = \min\{u_1, u_2, \ldots, u_n, +E\} = \min\{u_1, u_2, \ldots, u_n\},$$

$$u_{1sor} = -\frac{R_{c.\,r}}{R_1} \min\left\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \frac{R_1}{R_1+R} E\right\}.$$

4. Formateur du module. Etant donnée une fonction $x(t)$ on demande la fonction $y(t) = |x(t)|$. Il existe plusieurs schémas qui donnent à la sortie le module d'une fonction. Examinons deux d'entre eux.

Le premier est celui de la figure 2.30, *a*. L'élément principal en est un amplificateur opérationnel (AO) à deux branches de contre-réaction montées en parallèle. Les diodes sont branchées en opposition dans les contre-réactions donc c'est toujours l'une des branches

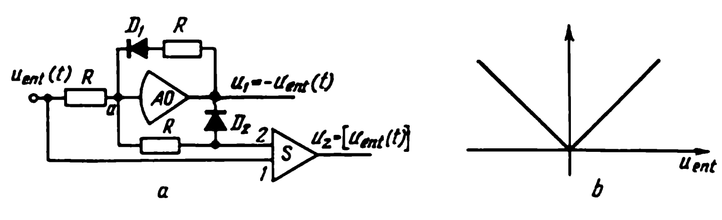


Fig. 2.30

qui conduit et non les deux à la fois, la commutation étant opérée par la polarité de la tension. La branche conductrice jouera le rôle d'une résistance de contre-réaction: $R'_{c.r} = R + R_{D\,dir} \approx R$ où $R_{D\,dir}$ est une petite résistance directe de la diode. La branche fermée oppose une résistance $R''_{c.r} = R + R_{D\,inv} \approx R_{D\,inv}$, où $R_{D\,inv}$ est la résistance inverse de la diode, qui est prépondérante devant R. Donc $R''_{c.r} \gg R'_{c.r}$ et la résistance de leur montage en parallèle est environ égale à R, quel que soit le signe du signal d'entrée. La tension de sortie de l'AO est toujours égale à $u_1 = -u_{ent}(t)$. Voyons pourquoi on obtient à la sortie du sommateur S une tension $u_2 = |u_{ent}(t)|$ et pourquoi la caractéristique entrée-sortie est de la forme représentée sur la figure 2.30, *b*.

Supposons que la tension d'entrée est positive ($u_{ent}(t) > 0$); alors c'est la branche inférieure de contre-réaction qui conduit le courant. La diode D_2 est ouverte, sa résistance est petite, donc la tension appliquée à l'entrée *2* du sommateur est pratiquement égale à la tension de sortie de l'AO, i.e. $u_1 = -u_{ent}$. L'entrée *1* du sommateur reçoit la tension $+u_{ent}$. A la sortie du sommateur on obtient la somme des tensions d'entrée, qui, compte tenu des coefficients des entrées, est égale à $u_2 = -u_{ent} + 2u_{ent} = +u_{ent}$.

Supposons que la tension d'entrée est négative ($u_{ent}(t) < 0$). Dans ce cas c'est la branche supérieure qui conduit le courant et la diode D_2 est bloquée. La tension appliquée à l'entrée *2* du sommateur S est pratiquement égale au potentiel du point « a », lequel est à la masse. Donc la tension est nulle à l'entrée *2* du sommateur. A son entrée *1*, la tension est telle qu'à sa sortie on a $u_2 = -(u_{ent}) - 2\cdot(0) = -u_{ent} > 0$. Donc, quel que soit le signe de la tension

d'entrée du montage, la tension de sortie du sommateur est positive et d'une amplitude égale à celle du signal d'entrée, i.e. $u_2 = |u_{\text{ent}}(t)|$.

Le deuxième schéma délivrant le module d'une fonction matérialise l'identité mathématique évidente $|y(t)| = \max\{x(t), -x(t)\}$.

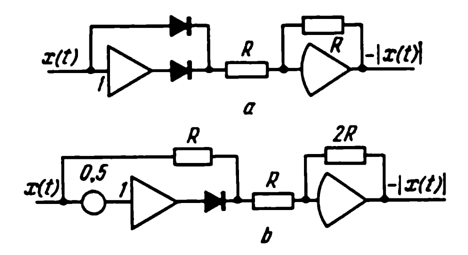


Fig. 2.31

Ce problème est donc ramené à un problème de maximisation. Les schémas correspondants sont représentés sur la figure 2.31, *a*, *b*.

Le schéma 2.31, *a* nécessite deux diodes. Il réalise l'expression

$$y(t) = -\max\{x(t), -x(t)\} = -|x(t)|.$$

Le schéma 2.31, *b* ne comprend qu'une diode et réalise l'expression

$$y(t) = -2\max\{0{,}5x(t), -0{,}5x(t)\} = -|x(t)|.$$

§ 11. Dérivateurs

Le schéma représenté sur la figure 2.32, *a* réalise la dérivation de la variable d'entrée $u_{\text{ent}}(t)$.

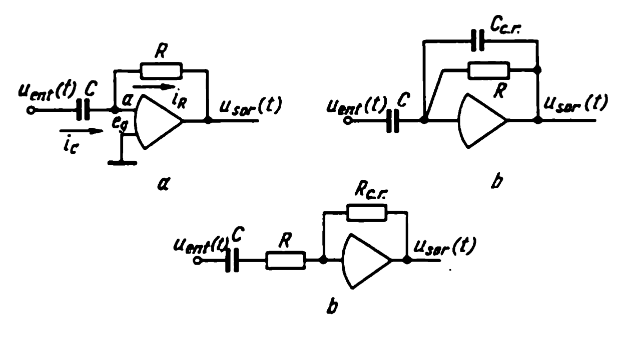


Fig. 2.32

Pour le démontrer écrivons l'équation de Kirchhoff pour le nœud « *a* »: $i_C = i_R$. Si maintenant l'on exprime les courants selon la loi d'Ohm, on obtient l'égalité

$$C\frac{d(u_{\text{ent}} - e_g)}{dt} = \frac{e_g - u_{\text{sor}}}{R}. \tag{2.18}$$

Comme $e_g = -\frac{u_{sor}}{K} \approx 0$, il vient

$$u_{sor}(t) = -RC\frac{du_{ent}}{dt}, \text{ C.Q.F.D.} \tag{2.19}$$

Le schéma de dérivation considéré est peu utilisé dans les calculateurs, car il possède la désagréable propriété d'amplifier les *perturbations* *). C'est pourquoi on s'arrange toujours pour éviter la dérivation. Si l'on n'y arrive pas on utilise des dérivateurs combinés qui procèdent également à un *lissage*. La figure 2.32, *b* et *c*, représente deux schémas effectuant une dérivation avec lissage. Dans le premier schéma le lissage est réalisé grâce à un condensateur introduit dans le circuit de contre-réaction. Dans le second schéma on utilise à cet effet une résistance d'entrée.

§ 12. Exercices et questions

1. Les calculateurs analogiques soviétiques ЭМУ-10 et МН-17М possèdent : le premier, 48, et le second, 80 intégrateurs et sommateurs. A quel type se rapportent-ils ?

2. Quelle est la fonction des principaux organes des calculateurs ?

3. Quelles sont les principales particularités de l'AO ?

4. Citer les types de contre-réaction que vous connaissez.

5. Montrer que le sommateur réalise l'expression

$$\frac{u_{sor}}{R_{c.r}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j}{R_j} = -\frac{u_{sor}}{K}\left[\frac{1}{R_{c.r}} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j}\right], \tag{2.20}$$

compte tenu de ce que le gain de l'AO est fini.

6. Comment ajuste-t-on le coefficient de transfert du sommateur ? Discuter le cas $\alpha > 1$, $\alpha < 1$, où α est le coefficient de transfert du sommateur pour une entrée quelconque.

7. Montrer que l'intégrateur réalise l'expression

$$\frac{du_{sor}}{dt} = -\frac{K}{K+1}\frac{u_{ent}}{RC} - \frac{u_{sor}}{RC(K+1)}, \tag{2.21}$$

compte tenu de ce que le gain de l'AO est fini.

8. Comment faut-il donner les conditions initiales pendant l'intégration ?

9. Comparer l'ajustage des coefficients de transfert des sommateurs et des intégrateurs.

10. Qu'entend-on par gel (fixation) de la solution et comment s'effectue-t-il ?

---

*) Pour plus de détails voir § 1, chapitre 3.

11. Trouver les expressions mathématiques réalisées par les schémas de la figure 2.33.

Nota :

le schéma 4) multiplie le vecteur $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ par une matrice constante;

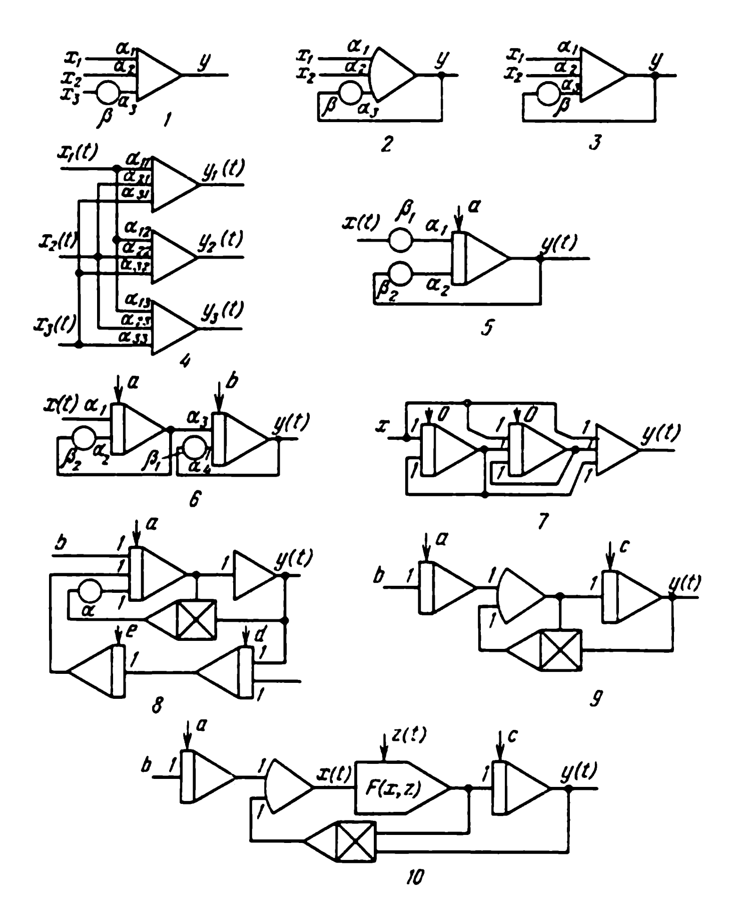


Fig. 2.33

les schémas 9) et 10) sont décrits par la même équation différentielle non résolue par rapport à la dérivée d'ordre supérieur ;

le schéma 10) est invariant par la transformation $f(x, z)$. L'est-il par toute autre transformation ?

12. Construire le schéma fonctionnel de résolution de l'équation

$$\exp(-\alpha t) \sin(\omega t + \psi_0) = 1 - \beta t.$$

13. Pourquoi les multiplieurs des machines à tubes électroniques possèdent-ils un facteur d'échelle $\mu = 0{,}01$?

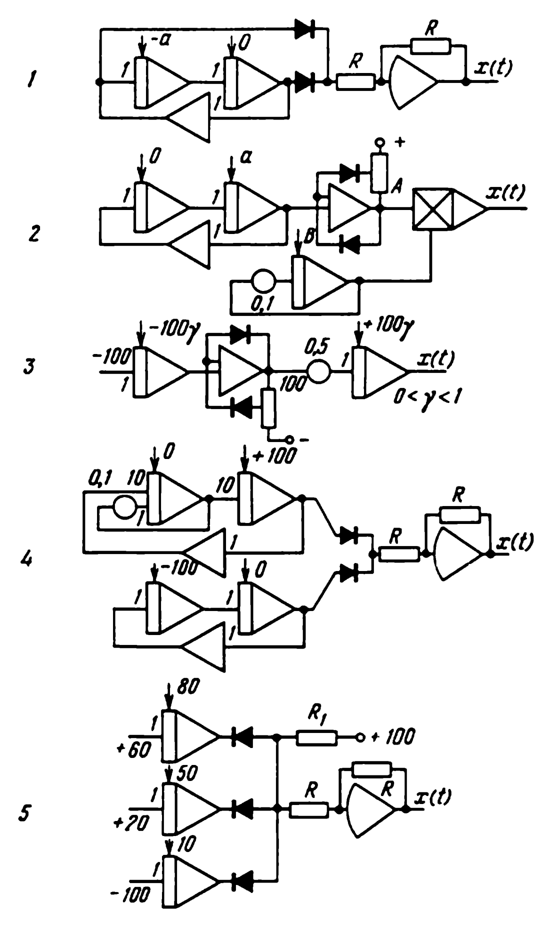


Fig. 2.34

14. Construire le schéma fonctionnel réalisant $y(t) = [x(t)]^{2/3}$, où $x(t)$ est une variable donnée.

15. Trouver les expressions mathématiques réalisées par les schémas fonctionnels de la figure 2.34.

16. Montrer que le dérivateur de la figure 2.32, *a* réalise l'expression

$$u_{sor} = -\frac{K}{K+1} RC \frac{du_{ent}}{dt} - \frac{RC}{K+1} \frac{du_{sor}}{dt}, \qquad (2.22)$$

compte tenu de ce que le gain de l'AO est fini.

17. Le schéma de la figure 2.26, *b* effectue une extraction de racine carrée par résolution de l'équation différentielle $y' = -K [y^2 - x]$, $y(0) = 0$. En faire la preuve en résolvant cette équation pour $x = x^* =$ $=$ const.

CHAPITRE 3

PRÉCISION DES CALCULATEURS

§ 1. Sources d'erreurs introduites par les calculateurs

Les calculateurs analogiques résolvent les problèmes avec des erreurs. On entend par *erreur* la différence entre la valeur exacte de la variable et la valeur fournie par la machine. Les erreurs sont dues à l'action conjointe d'un grand nombre de facteurs. Les plus importants d'entre eux sont les erreurs introduites par les opérateurs, les perturbations et la méthode de résolution choisie. Dans ce chapitre on se propose d'étudier l'influence des erreurs introduites par les opérateurs et les perturbations sur la précision des calculs.

La précision des opérations mathématiques est la caractéristique fondamentale des opérateurs. Pour évaluer cette précision on aura profit à introduire les notions d'*opérateur parfait* et d'*opérateur réel.* Les opérateurs examinés au chapitre 2 sont parfaits. Ils se caractérisent par une équivalence mathématique rigoureuse entre les processus physiques dont ils sont le siège et les opérations mathématiques qu'ils réalisent. L'opérateur parfait effectue les opérations avec une précision absolue. Il est certes impossible de le construire. C'est un dispositif abstrait commode pour évaluer les erreurs des opérateurs réels. Par *erreur* d'un opérateur réel on entend la différence entre les tensions de sortie de l'opérateur parfait et de l'opérateur réel. Pour trouver ces erreurs il faut étudier la structure interne des opérateurs réels. Cette étude peut être plus ou moins poussée. Pour notre part nous la ferons en première approximation. On supposera que les opérateurs parfait et réel sont constitués des mêmes éléments et que ces éléments sont reliés par les mêmes relations. La différence entre ces opérateurs tient simplement à la « qualité » des éléments de l'opérateur réel.

L'opérateur parfait, à l'inverse de l'opérateur réel, est composé d'éléments parfaits : d'un AO sans dérive, sans inertie et à gain infini ; des résistances et condensateurs avec des paramètres absolument exacts ne dépendant ni du temps, ni de la température, ni de l'humidité du milieu ambiant.

La tension de sortie de l'opérateur sera représentée par une fonction

$$u_{sor} = f(p_1, p_2, \ldots, p_n; u_1, u_2, \ldots, u_m), \qquad (3.1)$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les paramètres de l'opérateur; $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_m$ les variables d'entrée.

Cette expression devient en écriture vectorielle

$$u_{sor} = f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}),$$

où $\boldsymbol{p}$ est le vecteur des paramètres; $\boldsymbol{u}$ le vecteur des variables d'entrée; u_{sor} la tension de sortie (qui est un scalaire).

Par définition l'erreur de l'opérateur est

$$\Delta u_{sor} = f_p(\boldsymbol{p}_p, \boldsymbol{u}_p) - f_r(\boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{u}_r), \qquad (3.2)$$

où $f_p(\boldsymbol{p}_p, \boldsymbol{u}_p)$ est la fonction réalisée par l'opérateur parfait, $f_r(\boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{u}_r)$ la fonction réalisée par l'opérateur réel; $\boldsymbol{p}_p$ le vecteur des paramètres de l'opérateur parfait, $\boldsymbol{p}_r$ le vecteur des paramètres de l'opérateur réel, $\boldsymbol{u}_p$ le vecteur des variables d'entrée parfaites, $\boldsymbol{u}_r$ le vecteur des variables d'entrée réelles.

La précision de l'opérateur réel est liée à trois types d'erreurs.

Les erreurs du premier type sont *paramétriques*. Elles sont égales à la différence des paramètres: $\delta p_j = p_{jp} - p_{jr}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ ou sous la forme vectorielle: $\delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_p - \boldsymbol{p}_r$. Les erreurs paramétriques sont une conséquence des défauts de fabrication des pièces de l'opérateur.

Les erreurs du deuxième type sont *structurales* (ou *constructives*). Elles sont dues aux particularités constructives des éléments de l'opérateur et en premier lieu, des amplificateurs opérationnels qui, en vertu de leur principe de fonctionnement, ne peuvent posséder un gain infini, ni être sans inertie. Pour mettre ces erreurs en évidence, il faut analyser soigneusement les processus électriques qui se déroulent dans les opérateurs en tenant compte des particularités des schémas électroniques des AO.

Les erreurs du troisième type sont les *perturbations*. Elles se traduisent par l'absence de correspondance rigoureuse entre la variable machine et la variable mathématique. La variable machine varie de façon plus compliquée, voire même aléatoire comparativement à la variable mathématique. La variable $u_p(t)$ est dite *parfaite* en ce sens qu'elle est censée correspondre rigoureusement à la variable mathématique. La variable $u_r(t)$ est dite *réelle* dans la mesure où elle représente la tension de sortie d'un opérateur réel quelconque. La différence $\eta(t) = u_r(t) - u_p(t)$ s'appelle *perturbation*. Les perturbations sont caractérisées par une vitesse de variation dans le temps bien plus grande que celle des variables machine. La figu-

re 3.1 représente une variation typique, bien qu'un peu exagérée, des variables parfaite et réelle et de la perturbation en fonction du temps.

Les perturbations sont dues à un grand nombre de facteurs incontrôlables que l'on peut classer en intrinsèques et extrinsèques.

Les facteurs extrinsèques sont l'instabilité des sources d'alimentation, l'influence des divers dispositifs électriques puissants qui s'alimentent à la même source que le calculateur. La connexion et la déconnexion de ces dispositifs s'accompagnent de perturbations. Comme facteurs extrinsèques on a encore la température, l'humidité du milieu ambiant et les perturbations dites industrielles. Les diverses unités industrielles : transport électrique, moteurs électriques, fours haute fréquence pour la fusion, la trempe, le séchage, etc., engendrent un puissant champ électromagnétique qui perturbe le fonctionnement des opérateurs du calculateur. On arrive par des méthodes spéciales de construction à protéger presque entièrement le calculateur contre les perturbations extérieures.

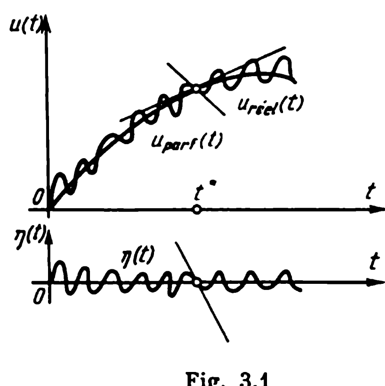


Fig. 3.1

Les facteurs intrinsèques sont liés directement aux opérateurs du calculateur. Ces perturbations sont inhérentes aux principaux phénomènes électroniques qui se déroulent dans les opérateurs. Elles sont dues aux fluctuations des courants et tensions électriques, d'où leur nom de *bruits de fluctuation*. D'une façon générale, par fluctuations on entend en physique des oscillations aléatoires de grandeurs autour de leur valeur moyenne. Les fluctuations sont dues à la nature stochastique de nombreux phénomènes physiques. Comme facteur intrinsèque, on a encore l'interaction des opérateurs. Les perturbations qui en résultent se propagent par les câbles de commutation et les circuits d'alimentation des opérateurs. Plus la vitesse de variation des variables machine est grande, plus fortes sont les perturbations engendrées par cette interaction. Il est impossible d'éliminer les bruits de fluctuation. Ce qu'on peut faire à la rigueur, c'est choisir des schémas et un régime de travail qui tende à réduire au minimum l'influence mutuelle des opérateurs.

En résumé, donc, les principales causes d'erreurs sont les perturbations, les erreurs de technologie et l'imperfection de l'AO, imperfection qui se traduit par la dérive du zéro, l'inertie et un gain fini. Ces erreurs se manifestent à des degrés différents selon le type d'opérateur.

§ 2. Erreurs liées aux opérateurs

D'une façon générale, l'erreur liée à un opérateur peut être approchée par la différentielle

$$\Delta u_{\text{sor}} \approx f[\boldsymbol{p}_{\text{p}}, \boldsymbol{u}_{\text{p}}(t)] - f[\boldsymbol{p}_{\text{p}} - \delta\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}_{\text{p}}(t) + \eta(t)] =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_{\text{p}j}} \delta p_j + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_{\text{p}k}} \eta_k(t), \qquad (3.3)$$

où $\frac{\partial f}{\partial p_{\text{p}j}}$ est la dérivée partielle de la fonction $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u})$ par rapport au paramètre $p_{\text{p}j}$, $\frac{\partial f}{\partial u_{\text{p}j}}$ la dérivée partielle de la fonction $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u})$ par rapport à la variable $u_{\text{p}k}$, $\eta_k(t)$ la perturbation de la variable d'entrée $u_k(t)$.

1. Erreurs liées au sommateur. En vertu de (2.3) le sommateur délivre la somme

$$u_{\text{sor}} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{R_{\text{c. r}}}{R_j} u_j.$$

L'erreur du sommateur due aux erreurs des paramètres ($R_{\text{c.r}}$, R_j, $j = 1, 2, \ldots, n$) et aux perturbations peut être exprimée à l'aide de la formule (3.3) comme suit:

$$\Delta u_{\text{sor}} \approx +\sum_{j=1}^{n} \frac{\delta R_{\text{c. r}}}{R_j} u_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{R_{\text{c. r}} \delta R_j}{R_j^2} u_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{R_{\text{c. r}}}{R_j} \eta_j(t),$$

où l'on suppose que les erreurs technologiques $\delta R_{\text{c.r}}$, δR_j et les perturbations $\eta_j(t)$ sont assez petites.

Les erreurs structurales du sommateur sont dues à la finitude du gain de l'AO, à la dérive du zéro et surtout aux particularités du schéma de principe électronique de l'AO.

En utilisant (2.20), on établit la relation suivante entre la tension de sortie du sommateur et le gain K de l'AO:

$$u_{\text{sor}} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{R_{\text{c. r}}}{R_j} u_j}{1 + \frac{1}{K}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{R_{\text{c. r}}}{R_j}\right)}.$$

On voit que plus le coefficient K est grand et moins il influe sur la tension de sortie.

Pour calculer l'erreur du sommateur liée à la dérive du zéro de l'AO, on supposera qu'à l'entrée de l'AO (voir fig. 2.3) est appliquée

une tension supplémentaire $-e_0(t)$ destinée à compenser la dérive. A la sortie de l'AO, on aura donc la tension

$$u = -[e_g - e_0(t)]\, K. \tag{3.4}$$

Si l'on tire e_g de (3.4) et que l'on porte son expression dans (2.3), on obtient, compte tenu de ce que $e_g = -\frac{u_{sor}}{K}$ est petit,

$$u_{sor} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{R_{c.r}}{R_j} u_j + e_0(t)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{R_{c.r}}{R_j}\right),$$

où $e_0(t)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{R_{c.r}}{R_j}\right)$ est l'erreur due à la dérive.

L'analyse des processus électriques se déroulant dans les schémas du sommateur et de l'AO permet de s'assurer que la tension de sortie du sommateur n'est exprimée qu'approximativement par la formule (2.3). La tension de sortie est décrite de façon plus exacte par l'expression :

$$T_2 \frac{d^2 u_{sor}}{dt^2} + T_1 \frac{du_{sor}}{dt} + u_{sor} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{R_{c.r}}{R_j} u_j, \tag{3.5}$$

où T_1 et T_2 sont des grandeurs petites qui sont habituellement négligées. Mais dans les cas où la vitesse de variation des variables d'entrée est grande, celle de $u_{sor}(t)$ peut l'être également. Si alors on néglige les termes en T_1 et T_2, on risque de commettre des erreurs élevées, ce qui dans certains types de schémas faussera les résultats.

Comme erreur structurale inhérente au sommateur citons encore le retard de la tension de sortie $u_{sor}(t)$ sur la tension d'entrée $u_{ent}(t)$, dû à l'inertie de l'amplificateur à courant continu (cf. § 2, chapitre 2). Dans les sommateurs et les amplificateurs d'échelle, le retard dépend du coefficient de transfert et vaut approximativement

$$\tau = \tau_r \frac{1+\alpha}{1+K},$$

où τ_r est le retard introduit par l'AO, $K \geqslant 4 \cdot 10^4$ le gain de l'AO, $\alpha = \left|\frac{u_{sor}}{u_{ent}}\right|$ le coefficient de transfert de l'opérateur. De (3.6) on voit que le retard de l'opérateur croît avec α. En général, α ne dépasse pas 20. Lorsque l'AO est utilisé comme un opérateur autonome, il est naturel de poser $\alpha = K$ et le retard est alors maximal.

2. Erreurs liées au sommateur intégrateur. L'erreur du sommateur intégrateur due aux erreurs des paramètres et aux perturbations s'exprime d'après la formule (3.3) compte tenu de (2.12):

$$\Delta u_{sor} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j C}\left[\left(\frac{\delta C}{C}+\frac{\delta R_j}{R_j}\right)\int_0^t u_j\,dt+\int_0^t \eta_j(t)\,dt\right]-\Delta u_0,$$

où Δu_0 est l'erreur d'initialisation.

Pour calculer l'erreur de construction de l'intégrateur, voyons par quoi se traduit la finitude du gain K de l'AO. En vertu de (2.21) on a l'équation différentielle en $u_{sor}(t)$

$$\frac{du_{sor}}{dt} = -\frac{K}{1+K}\frac{u_{ent}}{RC}-\frac{u_{sor}}{RC(1+K)}.$$

Intégrant les deux membres de cette équation et supposant que $\frac{K}{1+K}\approx 1$ on obtient

$$u_{sor}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t u_{ent}\,dt-\frac{1}{RC(1+K)}\int_0^t u_{sor}\,dt,$$

d'où l'erreur

$$\Delta u_{sor} = \frac{1}{RC(1+K)}\int_0^t u_{sor}\,dt.$$

Les deux dernières expressions montrent que l'erreur et la tension de sortie $u_{sor}(t)$ de l'intégrateur dépendent toutes deux de la tension d'entrée $u_{ent}(t)$. Examinons l'intégration de la constante $u_{ent} = 1$ pour voir comment se manifeste l'erreur structurale.

La tension de sortie de l'intégrateur parfait s'exprime comme $u_{sor} = -\frac{t}{RC}$. Celle de l'intégrateur réel est solution de l'équation différentielle (2.21) pour $u_{ent} = 1$:

$$\frac{du_{sor}}{dt} = -\frac{K}{1+K}\frac{1}{RC}-\frac{u_{sor}}{RC(1+K)}.$$

Sa solution analytique est

$$u_{sor}(t) = -K\left\{1-\exp\left[-\frac{t}{RC(1+K)}\right]\right\}.$$

En développant l'exponentielle en série, on obtient

$$u_{sor}(t) = -K\left\{1-1+\frac{t}{RC(1+K)}-\frac{t^2}{2(RC)^2(1+K)^2}+\ldots\right\}\approx$$

$$\approx -\frac{K}{1+K}\cdot\frac{t}{RC}\approx -\frac{t}{RC}.$$

Le premier terme négligé $\frac{K \cdot t^2}{2(RC)^2(1+K)^2}$ représente la principale erreur d'intégration. L'erreur est d'autant plus grande que le temps t d'intégration est élevé et que le gain de l'AO est petit. Donc pour diminuer l'erreur il faut réduire le temps d'intégration. Dans chaque calculateur concret, on recommande une durée d'intégration qui est fonction du type d'AO utilisé. Tout excès se traduit par des erreurs. Ainsi le calculateur soviétique MH-14 prévoit une durée d'intégration de 10 000 s, le MH-7 une durée de 150 s.

Voyons comment la tension de dérive contribue à l'erreur du sommateur intégrateur. On supposera comme précédemment qu'à l'entrée de l'AO est appliquée une tension supplémentaire $-e_0(t)$ destinée à compenser l'effet de la dérive. La tension de sortie de l'AO vaut $u_{sor} = -K[e_g - e_0(t)]$, d'où $e_g = -\frac{u_{sor}}{K} + e_0(t)$. Portant cette expression dans (2.9) et compte tenu de ce que $\frac{u_{sor}}{K} \approx 0$, il vient

$$u_{sor}(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j C} \int_0^t u_j \, dt + e_0(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j C} \int_0^t e_0(t) \, dt.$$

Les deux derniers termes sont l'erreur du sommateur intégrateur due à la dérive:

$$\Delta u_{sor}(t) = -e_0(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j C} \int_0^t e_0(t) \, dt. \tag{3.7}$$

Cette erreur croît avec les coefficients de transfert $\frac{1}{R_j C}$ de l'intégrateur et le temps t d'intégration. La limite inférieure d'intégration correspond à l'instant de la dernière compensation du zéro de l'AO.

3. **Erreurs du dérivateur.** En vertu de (2.19) la variable de sortie du dérivateur parfait a pour expression

$$u_{sor}(t) = -RC \frac{du_{ent}}{dt},$$

d'où l'on déduit l'expression de l'erreur due aux perturbations et aux erreurs des paramètres:

$$\Delta u_{sor}(t) = (C\delta R + R\delta C) \frac{du_{sor}}{dt} - RC \frac{d\eta(t)}{dt}. \tag{3.8}$$

Appliquons l'expression (2.22) pour définir l'erreur structurale liée à la finitude du gain K de l'AO. L'on constate que la tension

de sortie du dérivateur vérifie l'équation différentielle linéaire à second membre

$$\frac{RC}{1+K}\frac{du_{sor}}{dt}+u_{sor}=-\frac{K}{1+K}RC\frac{du_{ent}}{dt}.$$

Donc l'erreur dépend de la fonction à dériver. Etudions à titre d'exemple l'erreur qui entache la dérivation de la fonction $u_{ent}(t) = \alpha t$. A la sortie du dérivateur parfait on aurait, en vertu de (2.19), $u_{sor} = -\alpha RC$. L'expression de la tension de sortie d'un dérivateur réel se trouve par intégration de l'équation différentielle

$$\frac{RC}{1+K}\frac{du_{sor}}{dt}+u_{sor}=-\frac{K}{1+K}\alpha RC$$

avec la condition initiale $u_{sor}(0) = 0$. La solution est

$$u_{sor}(t)=-\frac{KRC\alpha}{1+K}\left[1-\exp\left(-\frac{1+K}{RC}t\right)\right],$$

et l'erreur

$$\Delta u_{sor}\approx-\alpha RC\exp\left(-\frac{1+K}{RC}t\right). \qquad (3.9)$$

On voit que cette erreur est fonction du temps et qu'elle croît avec la vitesse de variation α de la variable d'entrée. Elle prend sa valeur maximale $-\alpha RC$ à l'instant $t = 0$. Elle décroît d'autant plus vite que le gain de l'AO est élevé, de sorte qu'à la sortie de l'opérateur la dérivée est délivrée avec un retard d'environ $4RC/(1 + K)$ s.

Pour définir l'erreur due à la dérive du zéro de l'AO on supposera qu'à son entrée est appliquée une tension de compensation supplémentaire $-e_0(t)$. La tension d'entrée sera alors $e_g = -\frac{u_{sor}}{K} + e_0(t)$. En portant cette valeur dans (2.18) et compte tenu de ce que $\frac{u_{sor}}{K}$ est petit, on obtient

$$u_{sor}(t)=-RC\frac{du_{ent}}{dt}+RC\frac{de_0(t)}{dt}+e_0(t).$$

Les deux derniers termes représentent l'erreur du dérivateur due à la dérive du zéro de l'AO.

4. Erreurs liées aux opérateurs non linéaires. L'étude des erreurs liées aux opérateurs non linéaires implique une analyse détaillée des processus électriques, une analyse qu'il nous est impossible de faire. La diode à tube ou à semi-conducteurs est l'élément le plus fréquemment utilisé dans les opérateurs non linéaires. Les diodes sont généralement supposées idéales dans les calculs et la construction des opérateurs non linéaires. Sur la figure 3.2 la caractéristique tension-

courant réelle est représentée en pointillé et la caractéristique idéalisée en trait continu. i est le courant traversant la diode, u la tension. La figure montre qu'il faut attendre les plus grandes erreurs des opérateurs non linéaires dans le domaine des petites variations des variables machine.

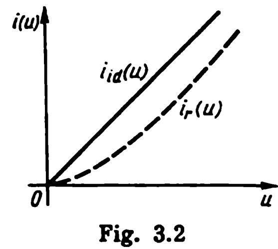


Fig. 3.2

5. **Comparaison des erreurs des opérateurs.** Des erreurs dues aux mêmes causes se manifestent différemment selon l'opérateur et l'opération réalisée. Ainsi, les erreurs de construction du sommateur, de l'intégrateur et du dérivateur, liées à la finitude du gain de l'AO diminuent lorsque ce gain croît. Quant au temps, les erreurs en dépendent différemment : dans le dérivateur les erreurs les plus grandes apparaissent au début du fonctionnement, dans l'intégrateur elles croissent avec le temps, dans le sommateur elles ne dépendent pas du temps. La sensibilité du dérivateur et de l'intégrateur aux perturbations n'est pas la même. Les perturbations sont caractérisées par une vitesse de variation plus grande comparativement à celle de la variable mathématique (idéale), donc en vertu de (3.8) la valeur relative des perturbations croît brusquement. On sait que la dérivée en un point est numériquement égale à la pente de la tangente à la courbe en ce point. Sur la figure 3.1 on a représenté les tangentes à un instant t^* à la courbe propre à l'opérateur parfait et à la perturbation, d'où il ressort qu'en dérivant la variable machine réelle, on est susceptible de commettre une erreur aussi bien sur la valeur de la dérivée que sur son signe. Cela vient du fait que la dérivation est au fond une opération locale. Au contraire, l'intégration est une opération qui est bien moins sensible aux perturbations. Sur la figure 3.1 on remarque que dans l'intégration les aires positives et négatives délimitées par le courbe η (t) se compensent mutuellement et influent très peu sur le résultat. Cette différence dans la sensibilité des opérations aux perturbations tient tout d'abord à la nature très distincte de la dérivation et de l'intégration et non pas aux particularités des opérateurs.

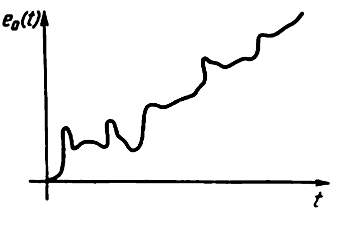


Fig. 3.3

La figure 3.3 représente une courbe de variation typique de la dérive du zéro en fonction du temps. On voit que la dérive est caractérisée par une variation dans un sens et qu'elle croît avec le temps. Donc l'erreur qu'elle entraîne pendant l'intégration croît avec le temps d'intégration.

§ 3. Facteur de qualité

Pour pallier à la difficulté d'évaluer *a priori* la précision du résultat en fonction des erreurs des opérateurs, des perturbations et de la précision des appareils de mesure, on introduit souvent un critère général de précision appelé *facteur de qualité*, qui est déterminé par la formule

$$d = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{min}} \approx \frac{E_{max}}{E_{min}},$$

E_{max} et E_{min} étant les valeurs maximale et minimale de la variable machine. Dans les machines à tubes $E_{max} = 100$ V ; E_{min} est déterminée expérimentalement pour chaque machine. Elle dépend du niveau des perturbations, des erreurs liées aux opérateurs, de la précision des appareils de mesure utilisés. Si, pendant un intervalle de temps assez long, la variable machine est inférieure à E_{min} et partant commensurable avec la perturbation, la solution du problème risque d'être affectée d'une grosse erreur.

Dans les meilleurs machines, si $E_{max} = 100$ V, on prend $E_{min} = 0{,}1$ V et le facteur de qualité vaut $d = 10^3$.

Le logarithme décimal du facteur de qualité, $m = \log d$, représente le nombre de décimales justes que l'on peut obtenir moyennant une utilisation adéquate de sa plage de fonctionnement.

§ 4. Questions et exercices

1. Qu'entend-on par erreurs de construction, erreurs des paramètres des opérateurs ?

2. Comment se manifestent les perturbations et quelles sont leurs sources ?

3. Comparer l'influence des perturbations sur les résultats des diverses opérations.

4. Par quels facteurs est limité le coefficient de transfert des opérateurs?

5. Par quoi est bornée la durée de résolution d'un problème quelconque sur calculateur analogique ?

6. Qu'est-ce que le facteur de qualité et de quoi dépend-il ?

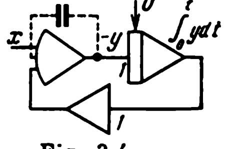


Fig. 3.4

7. La dérivation est parfois effectuée par la méthode des fonctions implicites selon le schéma de la figure 3.4.

1) Montrer que ce schéma résout l'équation implicite $F(y) = x(t) - \int_0^t y(t)\,dt = 0$ relativement à y par simulation de la solu-

tion de l'équation différentielle

$$y' = -K\left[x(t) - \int_0^t y(t)\,dt\right] \operatorname{sign}[F'_y]$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$, où K est le gain de l'AO.

2) Montrer que $y(t) = x'(t) + \delta(t)$, où $\delta(t)$, l'erreur du dérivateur, est une fonction périodique de période $T = 2\pi\sqrt{K}$. Trouver une équation différentielle pour $\delta(t)$ et définir, en la résolvant, l'erreur affectant la dérivation des fonctions $x(t) = \alpha t$, $x(t) = \sin t$.

8. Définir l'erreur de l'intégrateur due à la finitude du gain de l'AO pendant l'intégration de la fonction $A \sin \omega t$. Discuter en fonction de A et ω.

9. Définir l'erreur du dérivateur de la figure 2.32, *a* due à la finitude du gain de l'AO pendant la dérivation de la fonction $A \sin \omega t$. Discuter en fonction de A et ω.

CHAPITRE 4

PROBLÈMES GÉNÉRAUX DE LA PROGRAMMATION DES CALCULATEURS ANALOGIQUES

§ 1. Langage et étapes de la programmation

La résolution des problèmes sur calculateurs analogiques est précédée d'un travail préparatoire appelé *programmation.* La programmation consiste à retenir les opérateurs nécessaires à la résolution du problème et à les connecter en fonction des relations mathématiques données. On établit ainsi une correspondance entre les variables du problème et les variables machine.

Le résultat final de la programmation (le programme) se présente soit sous forme de tables de commutation, soit sous forme d'organigrammes qui, pendant la préparation du calculateur, sont utilisés pour la commutation électrique et le réglage des opérateurs.

Le programme doit contenir toute l'information nécessaire à la conduite du calculateur pour résoudre le problème donné. Les *échelles* sont indiquées dans des *tableaux* contenant la liste des variables mathématiques, celle des variables machine qui leur correspondent et les valeurs numériques des échelles.

Un programme est nécessairement écrit dans un langage (*langage de programmation*) qui doit remplir plusieurs critères. En effet, il doit être suggestif, compact, universellement accessible. Pour toutes ces raisons et parce qu'ils se prêtent bien aux publications on préfère les organigrammes aux tableaux. La forme tabulaire est plus compacte, mais elle est moins suggestive et privilégie la machine retenue. L'organigramme s'est imposé à la méthode tabulaire par son universalité. L'organigramme est un langage graphique dont on s'est servi jusqu'ici sans le mentionner expressément. Il met en jeu deux éléments : les *blocs* et les *liaisons.*

Les blocs sont symbolisés par des figures géométriques (rectangles, cercles, triangles, etc.). On a convenu de désigner certains types d'opérateurs toujours par les mêmes symboles. La nature de la correspondance entre les opérateurs et les blocs de l'organigramme est décrite dans les annotations. En cas de besoin on inscrit les relations mathématiques réalisées par les opérateurs à l'intérieur des symboles qui les représentent.

Les liaisons sont des lignes (orientées au besoin) qui indiquent le cheminement de l'information (variables, résultats d'opérations) élaborée par tel ou tel opérateur. A première vue on pourrait penser

que l'existence d'une liaison entre deux opérateurs n'équivaut pas à une opération. En fait la liaison symbolise une opération particulière, appelée *opération d'affectation* qui consiste à identifier constamment la variable d'entrée d'un opérateur à la variable de sortie de l'autre.

La programmation des calculateurs utilise jusqu'à quatre niveaux de langage d'organigrammes. Les niveaux de langage diffèrent par l'abondance des informations sur l'organisation du calcul. Enumérons-les en commençant par le plus haut : *organigrammes sommaires, schémas fonctionnels, schémas de commutation, schémas électriques.*

A titre d'illustration écrivons aux divers niveaux le programme de résolution de l'équation différentielle $x'(t) - y(t) \cdot x(t) = z(t)$ avec la condition initiale $x(0) = x_0$, où $y(t)$ est un coefficient variable égal à $\frac{1}{1+t}$ et $z(t) = -\exp(-t)$.

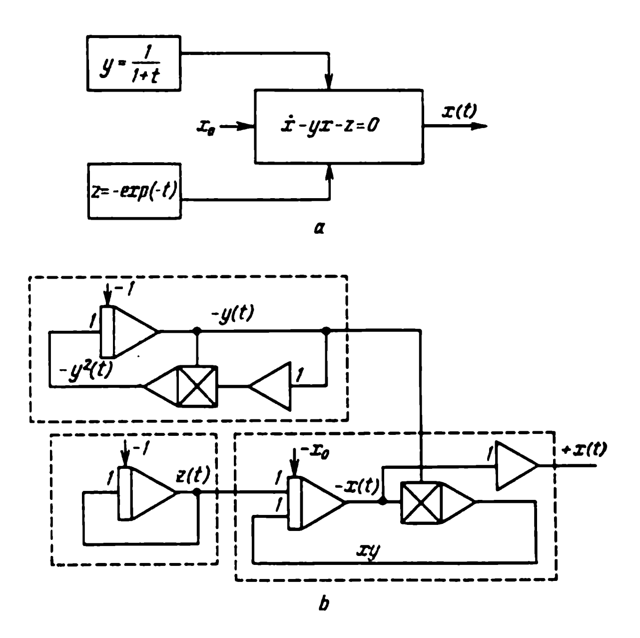
La figure 4.1, *a* représente l'organigramme au niveau le plus élevé. Le schéma comporte trois blocs indiquant par là même qu'on aura plus profit à reproduire séparément le coefficient $y(t) = \frac{1}{1+t}$, puis le second membre $z(t) = -\exp(-t)$ et seulement après la solution proprement dite de l'équation.

La figure 4.1, *b* représente l'organigramme du même problème mais au niveau fonctionnel. Le schéma fonctionnel de même que l'organigramme ne sont pas orientés vers un calculateur concret. Le schéma est détaillé à certains opérateurs d'un calculateur imaginaire abstrait.

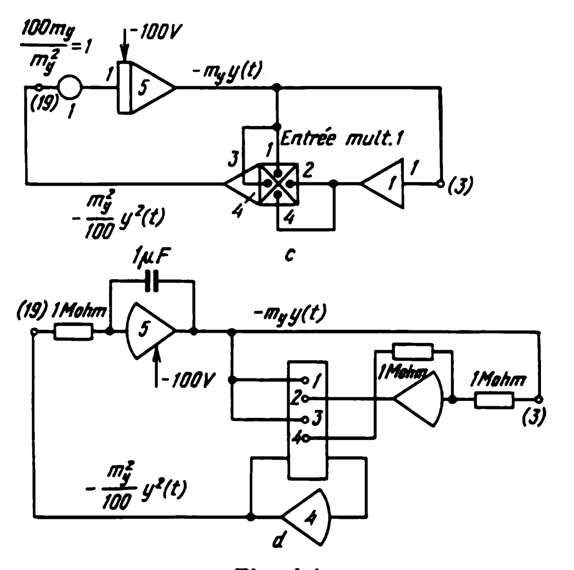
Le schéma est composé pour des variables mathématiques et traduit sous une forme assez générale l'idée fondamentale, le principe d'organisation des liaisons entre les opérateurs qui permettra d'aboutir à la solution cherchée. Pour faciliter la comparaison on a encadré par des rectangles en pointillé les groupes d'opérateurs de la figure 4.1, *b*, correspondant à ceux de la figure 4.1, *a*.

La figure 4.1, *c* représente le schéma détaillé du bloc de l'organigramme qui délivre la fonction $-y(t) = -\frac{1}{1+t}$. Ces schémas sont dits de commutation. Le schéma de commutation est orienté toujours vers le calculateur qui va servir à la résolution du problème. Il traduira donc les particularités de la connexion des opérateurs, propres à ce type de calculateurs. Ces particularités consistent en ce que la structure (ou topologie) du schéma de commutation peut ne pas répéter celle du schéma fonctionnel correspondant. Les schémas de commutation portent les numéros des opérateurs retenus et les numéros des entrées utilisées conformément au panneau de câblage du calculateur choisi. Le schéma de la figure 4.1, *c* est orienté vers la machine MH-7 *). Dans les schémas de commutation les variables

*) Voir l'Annexe.



y = 1/(1+t)
x₀
ẋ - yx - z = 0
x(t)
z = -exp(-t)
a
-1
1
-y(t)
-y²(t)
1
-1
1
z(t)
-x₀
1
-x(t)
1
1
+x(t)
xy
b



100m_y / m_y² = 1
-100V
1
5
-m_y y(t)
(19)
1
Entrée mult.1
3
1
2
1
1
(3)
- m_y²/100 y²(t)
4
4
c
1μF
(19) 1Mohm
5
-m_y y(t)
-100V
1
2
3
4
1Mohm
1Mohm
(3)
- m_y²/100 y²(t)
4
d

Fig. 4.1.

Amplificateur opérationnel	x ; $Kx = y$
Amplificateur d'échelle	x α ; $y = -\alpha x$
Sommateur	$x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; y $y = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$
Intégrateur (sommateur intégrateur)	$y(0)$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $y(t)$ $y = -\int_0^t \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j(t)\, dt + y(0)$
Potentiomètre	x ; β ; $y = \beta x$
Multiplieur	x ; y ; $z = xy$ $z = xy$

Fig. 4.2

u_x → $-Ku_x - u_y$	$K \gg 4\cdot 10^4$ — gain
$u_y = -\frac{R_{c.r}}{R} u_x$	$\alpha = \frac{R_{c.r}}{R}$ — coefficient de transfert de l'amplificateur d'échelle
$u_y = -\sum_{j=1}^{n} \frac{R_{c.r}}{R_j} u_{xj}$	$\alpha_j = \frac{R_{c.r}}{R_j}$ — coefficient de transfert du sommateur pour la j-ème entrée
$u_y(t) = -\int_0^t \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{xj}(t)}{R_j C} dt + u_c(0)$	$\alpha_j = \frac{1}{R_j C}$ — coefficient de transfert de l'intégrateur pour la j-ème entrée
$u_y = \frac{r}{R} u_x$	$\beta = \frac{r}{R}$ — coefficient de transfert du potentiomètre, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$
$u_z = \frac{u_x u_y}{100}$	$\frac{1}{100}$ — échelle constructive du multiplieur

Fig. 4.2

sont des tensions électriques. La variable machine correspondant à la variable mathématique $y(t)$ est égale au produit $m_y y(t)$ V, où m_y est l'*échelle* de la représentation de la variable mathématique par une tension électrique. Les schémas de commutation portent les valeurs numériques des coefficients de transfert des opérateurs et les rapports des potentiomètres compte tenu des échelles choisies. Les schémas de commutation sont utilisés pour câbler les problèmes sur le panneau de câblage de la machine. Aux liaisons (lignes) du schéma de commutation sont associés des câbles électriques se terminant par des fiches monopolaires.

La figure 4.1, *d* représente le schéma de principe détaillé au niveau des AO et des éléments (condensateurs, résistances) qui constituent les circuits d'entrée et les boucles de contre-réaction des opérateurs. Ces schémas sont dits électriques. Ils remplacent souvent les schémas de commutation lors de la composition des problèmes.

Sur la figure 4.2 sont représentés les principaux opérateurs des calculateurs analogiques et leurs équivalents électriques.

Il est commode de scinder la programmation des calculateurs en quatre étapes consistant, la première à analyser le problème donné, la seconde à mettre au point le schéma fonctionnel, la troisième à choisir l'échelle de représentation des variables mathématiques par les variables machine et la quatrième, enfin, à élaborer le schéma de commutation.

Dans la première étape les expressions mathématiques du problème initial sont analysées dans le but d'être ramenées à une forme accessible à la machine. En effet, bien des problèmes ne se prêtent pas à la simulation dans leur forme initiale. Les calculateurs analogiques sont le mieux adaptés à la résolution d'équations différentielles ordinaires, données sous forme d'un problème de Cauchy. Donc pour résoudre sur calculateurs des problèmes qui se posent sous une forme autre que les équations différentielles ordinaires, il faut les ramener par des méthodes adéquates à des problèmes de Cauchy équivalents. Cette « reposition » des problèmes fera l'objet de la plupart des chapitres suivants.

La deuxième étape est l'étape d'établissement des schémas fonctionnels correspondant à l'organigramme de résolution du problème. Comme dans la plupart des cas les données initiales sont ramenées à un problème équivalent de Cauchy, la principale méthode de programmation des calculateurs est la méthode de construction des schémas fonctionnels pour la simulation d'équations différentielles. Ces méthodes seront exposées dans le détail au chapitre suivant.

A noter qu'une même méthode peut être réalisée par des schémas différents. Ces schémas sont équivalents puisqu'ils résolvent le même problème, mais ils se distinguent entre eux par le type d'opérateurs mis en jeu ainsi que par le caractère des liaisons. Il est donc très important de choisir un schéma exact et optimal.

La notion de schéma optimal prend une signification différente selon le problème et le type de calculateur utilisé. Mais quoi qu'il en soit, le meilleur schéma est toujours celui qui à tierces conditions égales est plus économique, i.e. demande moins de temps pour la préparation du calculateur et la génération de la solution. D'ordinaire, entre deux schémas fonctionnels, on choisit celui qui met le moins d'opérateurs en jeu. Mais les opérateurs ne sont pas équivalents quant à la précision des opérations effectuées et le temps nécessaire à leur préparation et leur mise au point. L'établissement de

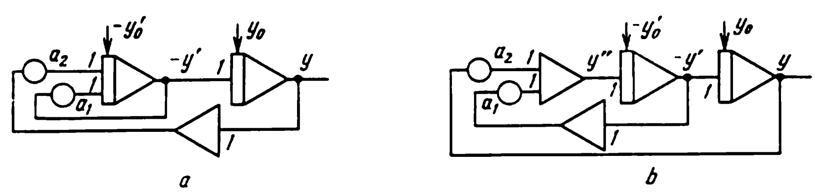


Fig. 4.3

schémas fonctionnels économiques mettant en service peu d'opérateurs est à envisager probablement lorsqu'on a toutes les raisons de penser qu'on en manquera pour résoudre le problème. Si l'on dispose d'une quantité suffisante d'opérateurs, il semble qu'on n'ait aucun profit à lésiner sur les moyens. Il est encore un critère important, c'est la rançon de l'économie des opérateurs. Le plus souvent la réduction de l'équipement mis en œuvre se traduit par une diminution de l'information sur le phénomène étudié. Cette perte d'information peut être si élevée que les résultats obtenus ne correspondent plus aux objectifs fixés.

Un exemple nous est donné par les schémas de la figure 4.3, *a* et *b*. Ils fournissent tous les deux la solution de l'équation différentielle

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

avec les conditions initiales

$$y'(0) = y'_0, \quad y(0) = y_0.$$

Le schéma 4.3, *a* est plus économique, il contient un sommateur en moins. Les fonctions du sommateur et de l'intégrateur sont cumulées par un seul opérateur : le sommateur intégrateur. Cependant ce schéma est moins informatif que le schéma 4.3, *b* puisqu'il ne délivre pas la variable $y''(t)$. On pourra donc s'en servir dans les cas où le comportement de la variable $y''(t)$ importe peu.

Nous étudierons dans le détail le contenu de la troisième et la quatrième étape dans la suite. Avant de conclure ce paragraphe, arrêtons-nous sur les problèmes relatifs à l'organisation du contrôle

de la marche du calculateur, problèmes qui sont étroitement liés aux deux premières étapes de la programmation.

La nécessité de contrôler la marche du calculateur est due à l'éventualité d'un mauvais fonctionnement pour les causes les plus diverses : tubes ou appareils à semi-conducteurs grillés, variation des paramètres des opérateurs par vieillissement des éléments constitutifs, variation de l'humidité et de la température du milieu ambiant, coupure des liaisons électriques entre les opérateurs par rupture des câbles de commutation et perte de contact avec le panneau de câblage. Tout ceci peut se traduire par une perte totale du résultat ou une imprécision dans les calculs. Le contrôle du fonctionnement du calculateur permet au programmeur de mettre en évidence les causes du mauvais fonctionnement et d'y remédier en temps opportun. Ce contrôle est particulièrement important dans les calculateurs spécialisés fonctionnant dans les systèmes de commande automatique. Ici les normes de fiabilité et la qualité du contrôle sont plus élevées.

Un mauvais fonctionnement d'un calculateur inclus dans un système de commande automatique pourrait au pire entraîner la destruction de l'objet commandé. La localisation des erreurs n'est pas toujours la solution miracle. Le travail du système de commande doit être organisé de telle sorte que les éventuelles erreurs ne se répercutent pas sur la qualité de la commande et à fortiori sur la durée de vie de l'objet guidé. D'une façon générale, cette insensibilité aux diverses perturbations dans le fonctionnement du calculateur est assurée par une redondance des opérateurs.

Le contrôle du fonctionnement du calculateur repose sur la vérification automatique de certaines *relations de contrôle*. Souvent on réussit dès le stade de l'analyse du problème donné à trouver des expressions mathématiques qui doivent être vérifiées par les variables. Ces relations de contrôle se ramènent à la forme

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \tag{4.1}$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les variables du problème à résoudre. On peut se servir d'expressions du type (4.1) pour le contrôle seulement dans le cas où elles n'interviennent pas dans l'établissement des schémas réalisant la solution cherchée. En plus du schéma générant la solution cherchée, on établit un schéma de contrôle réalisant les relations de contrôle (4.1).

Lorsqu'on résout une équation différentielle, on prend souvent pour relation de contrôle cette équation elle-même dans laquelle on porte la solution à l'aide de la machine. Ainsi, la figure 4.4 représente le schéma fonctionnel de l'équation

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

avec les conditions initiales $y'(0) = y'_0$, $y(0) = y_0$ et le schéma de contrôle qui porte les valeurs $y(t)$, $y'(t)$ et $y''(t)$ élaborées dans l'équation initiale. Pour cela on se sert du sommateur auxiliaire à trois entrées représenté en bas du schéma de la figure 4.4. Ce sommateur délivre la variable $z = -10\,(y'' + a_1y' + a_2y)$. Si le calculateur effectuait les opérations avec une précision absolue, la

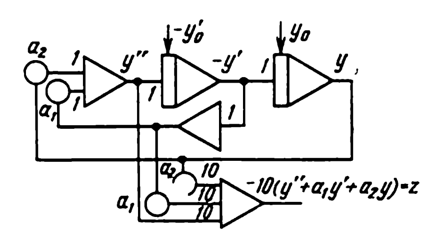


Fig. 4.4

variable z serait nulle. En réalité la variable $z \neq 0$ et sa valeur caractérise la déviation de la solution délivrée par le calculateur par rapport à celle de l'équation donnée. Pour faciliter la mesure de z, tous les coefficients de transfert du sommateur de contrôle sont pris égaux à dix.

Parfois on a des difficultés à trouver des relations de contrôle convenables pour les variables initiales. On peut se tirer d'affaire toutefois en introduisant des *variables redondantes* (auxiliaires). Ces variables sont considérées uniquement pour faciliter le contrôle et en principe ne sont liées en aucune autre façon avec le problème posé. La redondance permet de se donner de façon arbitraire des relations de contrôle dépendant des variables initiales et auxiliaires. Il est évident que le nombre de relations de contrôle doit être égal à celui des variables redondantes. La grande latitude dont on dispose dans le choix des relations de contrôle permet d'établir des schémas de contrôle assez efficaces.

Illustrons la méthode des variables redondantes sur l'exemple d'un système d'équations différentielles que l'on rencontre fréquemment en approchant une équation différentielle aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles ordinaires (§ 4, chapitre 7):

$$\left.\begin{array}{ll} y'_1(t) = y'_0(t) - 2y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = y_{10}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y'_j(t) = y_{j-1}(t) - 2y_j(t) + y_{j+1}(t), & y_j(0) = y_{j0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y'_n(t) = y_{n-1}(t) - 2y_n(t) + y_{n+1}(t), & y_n(0) = y_{n0}, \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

où $y_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ est solution du système (4.2); $y_0(t)$ et $y_{n+1}(t)$ des fonctions connues de la variable indépendante t.

On a profit à prendre ici pour relation de contrôle l'expression $z(t) + \sum_{j=1}^{n} y_j(t) = 0$, où $z(t)$ est la variable redondante. Cette relation est facilement réalisable sur calculateur lorsqu'on possède un schéma restituant la variable redondante $z(t)$. Il est facile de trouver une équation différentielle dont $z(t)$ soit solution. Pour cela il suffit de dériver la relation de contrôle $z'(t) = -\sum_{j=1}^{n} y'_j(t)$ et d'exprimer chaque dérivée $y'_j(t)$ en fonction de la valeur de la fonction conformément au système initial d'équations (4.2):

$$z'(t) = -[y_0(t) - y_1(t) + y_{n+1}(t) - y_n(t)], \quad z(0) = -\sum_{j=1}^{n} y_j(0). \quad (4.3)$$

Le calculateur délivre la solution $z(t)$ de l'équation (4.3) en même temps que celle du système initial. S'il fonctionne normalement les relations de contrôle doivent être réalisées.

On aurait pu prendre une autre relation de contrôle, par exemple $z(t) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j(t) = 0$ ou une autre encore. En se donnant une relation de contrôle il faut toujours l'utiliser simultanément avec le système initial pour rechercher l'équation différentielle qui définit la variable redondante.

La qualité du contrôle dépend essentiellement des relations de contrôle choisies. A signaler qu'il n'est pas exclu que les relations de contrôle soient vérifiées alors que la solution est incorrecte et vice versa.

L'automatisation du contrôle du fonctionnement du calculateur peut être poussée à un degré tel que la violation d'au moins une condition (4.1) entraîne l'arrêt de la machine et le programmeur est immédiatement avisé des causes. Mais d'une façon générale, plus le schéma de contrôle est parfait et exhaustif, plus il nécessite d'opérateurs pour sa réalisation. L'inconvénient c'est que plus ces opérateurs de contrôle sont nombreux et plus ils ont besoin à leur tour d'être contrôlés.

§ 2. Choix de l'échelle des variables dépendantes

Les variables mathématiques sont représentées à l'échelle choisie sous forme de grandeurs physiques appelées variables machine. Les variables mathématiques dépendantes sont représentées par

des tensions électriques, la variable indépendante est assimilée au temps.

Le choix de l'échelle des variables mathématiques dépendantes est l'une des étapes les plus complexes et les plus importantes de la programmation en raison de l'incompatibilité des critères qu'il doit remplir. Voyons les trois principaux d'entre eux.

Primo : aucune variable machine ne doit quitter la plage de linéarité de l'amplificateur, qui est comprise entre —100 V et 100 V pour les machines à tubes. En dehors de cet intervalle les opérations effectuées par les opérateurs sont entachées de grandes erreurs.

Secundo : les variables machine doivent être observables, i.e. elles ne doivent pas être trop petites ni varier trop vite, de manière à ce qu'elles puissent être repérées avec assez de précision par les instruments de mesure ou d'enregistrement. On admet qu'une variable machine est petite si elle est commensurable avec les erreurs des opérateurs.

Tertio : la variable machine ne doit pas rester petite pendant longtemps, car cela risquerait de se traduire par une non-répétition des résultats lorsqu'on résout plusieurs fois le même problème, à cause du caractère aléatoire des erreurs des opérateurs.

Les variables mathématiques dépendantes x, y, z sont figurées par les tensions $u_x = m_x x$, $u_y = m_y y$, $u_z = m_z z$, où m_x, m_y, m_z sont les échelles. Elles sont de dimension : $\left[\frac{\text{volt}}{\text{unité de mesure de la variable}}\right]$.
Les échelles sont utilisées sous forme de grandeurs constantes ou de fonctions de la variable indépendante t. Le choix de l'échelle dépend du caractère de variation de la variable mathématique. La figure 4.5 représente le graphe de la variable $x_1(t)$. Pour cette dernière il faut prendre une échelle qui dépende du temps et telle qu'elle soit grande entre 0 et t_1 et petite entre t_1 et t^*. Ce faisant on satisfera le troisième critère. Si une variable, par exemple $x_2(t)$, varie de façon assez « uniforme » sur l'intervalle $[0, t^*]$, on peut se contenter d'une échelle constante.

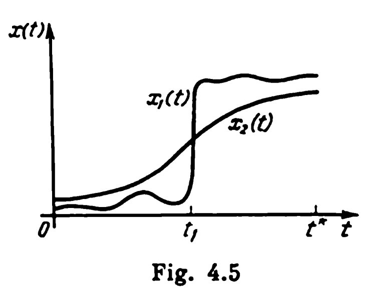


Fig. 4.5

1. Calcul des échelles constantes. Les deux premiers critères (observabilité des tensions et variation dans la plage ±100 V) sont presque toujours immédiatement réalisés lorsque les échelles sont choisies à partir des formules

$$m_x = \frac{100}{x_{\max}}\left[\frac{\text{volt}}{\text{unité de mesure}}\right],\qquad m_y = \frac{100}{y_{\max}}\left[\frac{\text{volt}}{\text{unité de mesure}}\right]. \tag{4.4}$$

Effectuons à titre d'exemple le calcul des échelles des variables dont on connaît les limites de variation: la distance s varie dans l'intervalle $0 \leqslant s \leqslant 4\,300$ m; l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ dans l'intervalle $-20 \leqslant \ddot{\theta} \leqslant 10$ rad/s²; la température T dans l'intervalle $190° \leqslant T \leqslant 390°$.

Il est commode de faire le calcul en se servant de *tableaux d'échelles* du type suivant:

Tableau 4.1

(1) Variable	(2) Valeur absolue maximale	(3) Valeur arrondie	(4) Echelle	(5) Symbole de l'échelle
s	4 300 m	5 000	$\frac{100}{5000}=0{,}02$ V/m	m_s
$\ddot{\theta}$	20 rad/s²	20	$\frac{100}{20}=5\frac{\mathrm{V\cdot s^2}}{\mathrm{rad}}$	$m_{\ddot{\theta}}$
T	390°	400	$\frac{100}{400}=0{,}25\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{degré}}$	m_T

Expliquons le contenu de la colonne (3). Les nombres de cette colonne ont été obtenus à partir des quantités de la colonne (2) par un arrondi par excès (au besoin) au plus proche nombre de la forme $1 \times 10^{\pm n}$; $2 \times 10^{\pm n}$; $3 \times 10^{\pm n}$; $4 \times 10^{\pm n}$; $5 \times 10^{\pm n}$, où n est un entier.

L'usage de ces nombres allège les calculs relatifs au passage des variables machine aux variables mathématiques et inversement.

Il est parfois possible de porter dans la colonne (2) non pas des nombres, mais des expressions dépendant des paramètres du problème à résoudre. Un tel changement d'échelle sous « forme générale » permet d'obtenir des schémas de commutation qui permettent de résoudre toute une classe de problèmes similaires aux valeurs numériques initiales près.

2. Concordance des échelles. Si les échelles sont choisies en vertu de (4.4) il faut procéder à leur *concordance.* La raison essentielle en est que lorsqu'on effectue des opérations sur les variables machine, les échelles doivent vérifier certaines relations qui dépendent de la nature de l'opération et du procédé de sa réalisation. Pour concorder les échelles on se sert de potentiomètres et d'amplificateurs d'échelles.

Illustrons la méthode de concordance des échelles sur quelques opérations. Cette méthode se base sur la méthode bien connue en algèbre des coefficients indéterminés. Elle consiste à égaler les

coefficients de l'expression mathématique initiale à ceux de l'expression mathématique qui décrit le fonctionnement des opérateurs. Cette dernière expression mathématique renferme les variables machine exprimées en fonction des échelles connues et des coefficients de transfert des amplificateurs d'échelle et des rapports des potentiomètres qui restent à déterminer. On obtient un système d'équations en les coefficients de transfert cherchés.

1. Addition. Il faut délivrer une combinaison linéaire de deux variables x et y:

$$-z = \beta_x x + \beta_y y, \tag{4.5}$$

où β_x et β_y sont des nombres positifs donnés.

Le schéma qui réalise la variable z est représenté sur la figure 4.6, *a*, où les potentiomètres placés à l'entrée du sommateur effectuent la multiplication des variables x et y par les coefficients β_x et β_y.

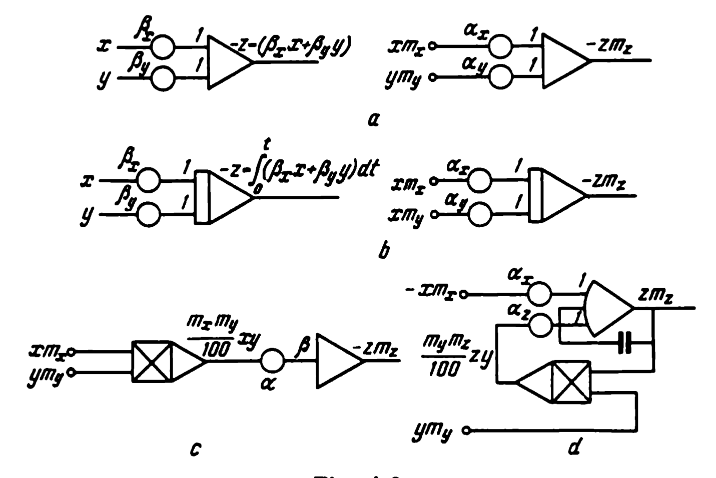


Fig. 4.6

Supposons que les échelles de représentation des variables x, y et z ont déjà été choisies d'après leurs valeurs maximales x_{max}, y_{max}, z_{max} et qu'elles sont respectivement égales à m_x, m_y, m_z. Le montage de droite de la figure 4.6, *a* représente le schéma de commutation correspondant au schéma fonctionnel. Comme tout schéma de commutation, il est établi pour les variables machine, donc les coefficients de transfert α_x et α_y ne sont pas encore connus. Il importe de les choisir tels que la variable machine correspondant à z ait précisément l'échelle m_z. Pour déterminer α_x et α_y écrivons l'expression analytique suggérée par le schéma et liant les variables machine $m_z z$, $m_x x$, $m_y y$:

$$-m_z z = \alpha_x m_x x + \alpha_y m_y y. \tag{4.6}$$

En divisant par m_z, on obtient

$$-z=\frac{\alpha_x m_x}{m_z}x+\frac{\alpha_y m_y}{m_z}y. \tag{4.7}$$

En égalant maintenant les coefficients en x et y des expressions (4.5) et (4.7) il vient

$$\beta_x=\frac{\alpha_x m_x}{m_z}, \quad \beta_y=\frac{\alpha_y m_y}{m_z},$$

d'où

$$\alpha_x=\beta_x\frac{m_z}{m_x}, \quad \alpha_y=\beta_y\frac{m_z}{m_y}. \tag{4.8}$$

Les coefficients β_x et β_y portés par les schémas fonctionnels sont appelés coefficients *fonctionnels*, les coefficients de transfert α_x et α_y indiqués sur le schéma de commutation, *coefficients d'échelle* ou *facteurs d'échelle*. Ceci souligne le rôle important que jouent les potentiomètres des schémas de commutation dans l'adaptation des échelles. Donc l'adaptation des échelles pendant la réalisation de l'expression (4.5) nous conduit à la conclusion : *le facteur d'échelle est égal au produit du coefficient fonctionnel par le rapport des échelles des variables de sortie et d'entrée.*

2. Intégration. Soit à réaliser l'expression

$$z=-\int_0^t(\beta_x x+\beta_y y)\,dt, \tag{4.9}$$

où β_x et β_y sont des nombres positifs donnés, x et y des fonctions de la variable indépendante t.

On suppose que les échelles m_x, m_y, m_z des variables x, y et z ont déjà été définies d'après leurs valeurs maximales x_{max}, y_{max}, z_{max}. Le schéma fonctionnel de la figure 4.6, *b* représente l'intégrateur qui débite l'expression analytique initiale (4.9). Le montage de droite de la figure 4.6, *b* représente le schéma de commutation de l'intégrateur muni de deux potentiomètres de rapport α_x et α_y qui sont à déterminer à partir des conditions de concordance des échelles. Les tensions électriques vérifient l'équation suivante :

$$zm_z=-\int_0^t(\alpha_x m_x x+\alpha_y m_y y)\,dt.$$

En divisant par m_z, on obtient

$$z=-\int_0^t\left(\alpha_x\frac{m_x}{m_z}x+\alpha_y\frac{m_y}{m_z}y\right)dt.$$

En égalant les coefficients de cette dernière égalité et de l'équation initiale (4.9) on obtient les mêmes expressions que pour l'addition, soit

$$\alpha_x = \frac{m_z}{m_x}\beta_x, \quad \alpha_y = \frac{m_z}{m_y}\beta_y.$$

3. Multiplication. Soit à effectuer le produit $z = -\gamma xy$, où γ est un nombre positif. Les échelles des variables x, y, z sont fixées et égales à m_x, m_y, m_z. L'opération est effectuée d'après le schéma de commutation de la figure 4.6, *c*. Le rapport α du potentiomètre et le gain β de l'amplificateur d'échelle sont à déterminer à partir des conditions de concordance des échelles.

Ecrivons l'équation liant les tensions électriques: $-m_z z = \alpha \cdot \beta \frac{m_x m_y}{100} xy$. Le dénominateur 100 correspond à l'échelle du schéma du multiplieur. En divisant la dernière équation par m_z et en égalant les coefficients, on obtient

$$\alpha\beta = \frac{100 m_z}{m_x \cdot m_y} \cdot \gamma.$$

4. Division. Soit à effectuer la division $z = \gamma \frac{x}{y}$, où γ est un nombre positif donné. Les échelles des variables x, y et z sont fixées et égales à m_x, m_y, m_z. Lorsque cette opération est effectuée par la méthode des fonctions implicites l'expression $z = \gamma \frac{x}{y}$ est ramenée à l'équation

$$\frac{1}{\gamma} zy - x = 0$$

qui est soluble relativement à z. Le schéma de commutation correspondant est représenté sur la figure 4.6, *d*. Deux potentiomètres de rapports α_z et α_x sont nécessaires pour la concordance des échelles. La somme algébrique des variables d'entrée étant nulle à l'entrée de l'AO, on a l'égalité

$$\alpha_z \frac{m_z m_y}{100} zy - \alpha_x m_x x = 0.$$

En divisant par $\alpha_x m_x$ et en égalant les coefficients à ceux de l'équation $\frac{1}{\gamma} zy - x = 0$ on obtient pour la détermination des coefficients α_z et α_x la relation

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_z} = \frac{m_z m_y}{100 \cdot m_x} \gamma.$$

3. Difficultés du choix des échelles. Le choix des échelles des variables dépendantes se heurte à des difficultés liées à l'estimation des

valeurs maximales de ces variables avant la restitution de la solution. Rappelons que l'échelle de la variable x (t) est calculée à l'aide de la formule $m_x = \frac{100}{|x_{max}|}$ dans laquelle figure x_{max}. La variable x (t) définie sur l'intervalle $[0, t^*]$ peut atteindre son maximum soit aux extrémités, soit à l'intérieur de cet intervalle. Certains cas sont représentés sur la figure 4.7. Les fonctions monotones de la figure 4.7, *a* et *b*, atteignent leurs valeurs maximales aux extré-

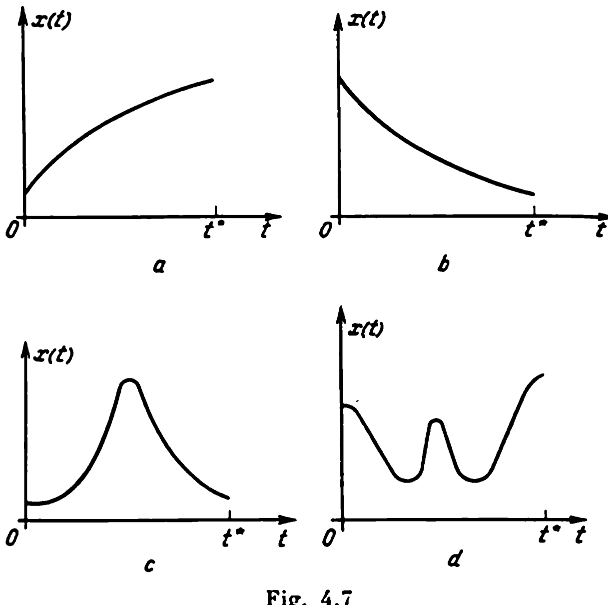


Fig. 4.7

mités de l'intervalle. La figure 4.7, *c* représente une fonction dont le maximum coïncide avec un extremum local. Un cas plus général du comportement de la variable x (t) est illustré sur la figure 4.7, *d*. Il en résulte que la valeur maximale x_{max} de x (t) utilisée dans le calcul de l'échelle est définie par

$$x_{max} = \max \{|x(0)|, |x(t_1)|, \ldots, |x(t_k)|, |x(t^*)|\},$$

où t_1, t_2, . . ., t_k sont les points d'extremas locaux.

Il va de soi qu'il n'est pas toujours possible de déterminer la valeur maximale de la variable sans avoir préalablement résolu le problème. Cependant on arrive parfois à connaître l'intervalle de variation des variables au stade de l'analyse du problème initial. Le plus souvent, quand on résout des problèmes, on essaye de leur trouver un problème ayant le même contenu physique et admettant une solution analytique simple, de manière à estimer les valeurs

maximales des variables du problème initial. Le problème auxiliaire posé s'appelle *problème d'échelle.*

Lorsqu'il est difficile de faire des hypothèses suffisamment fondées sur le domaine de variation des variables lors du choix de l'échelle, on s'adresse à la méthode des essais en éliminant les erreurs au fur et à mesure de leur apparition pendant la génération de la solution.

Si, au cours de la résolution d'essai, certaines variables machine sortent de la plage ± 100 V, leurs échelles sont à réduire en conséquence. Inversement, si une variable machine varie dans une très petite plage, il importe d'en augmenter l'échelle de façon à élever la précision des résultats. Ainsi, en résolvant le problème avec des échelles différentes on arrivera au bout du compte à choisir des échelles qui assurent une précision acceptable.

4. Choix de l'échelle dynamique. Le *choix de l'échelle dynamique* équivaut à une transformation des variables mathématiques initiales en d'autres variables mathématiques auxquelles il est commode d'appliquer les échelles constantes. Montrons-le. Supposons que la variable $x(t)$ est assimilée à une tension électrique comme suit :

$$u_x(t) = m_x(t) \cdot x(t), \tag{4.10}$$

où $m_x(t)$ est une échelle variable. Mettons cette dernière sous la forme $m_x(t) = M_x \mu(t)$, où M_x est la constante de dimension de l'échelle, $\mu(t)$ une fonction adimensionnelle. En portant M_x et $\mu(t)$ dans (4.10), on obtient l'expression de la variable machine sous la forme habituelle : $u_x(t) = M_x \mu(t) \cdot x(t) = M_x X(t)$, où $X(t) = \mu(t)\, x(t)$ est la nouvelle variable mathématique, et M_x son échelle constante.

Le choix de la fonction $\mu(t)$ est défini par le caractère de variation de la fonction $x(t)$, une variation dont souvent on n'a une idée qu'au terme d'une génération expérimentale de $x(t)$ sur machine avec une échelle constante expérimentale. Deux types de fonctions $\mu(t)$ se sont avérés commodes pour cette opération.

Le premier type est une fonction $\mu(t)$ constante par morceaux sur l'intervalle $[0, t^*]$. On partitionne l'intervalle $[0, t^*]$. L'échelle est constante mais distincte d'un intervalle partiel à l'autre. Si l'on a adopté cette méthode d'échelles constantes par morceaux, la résolution du problème se ramène à une résolution successive d'autant de problèmes indépendants que l'intervalle $[0, t^*]$ ne compte d'intervalles partiels. Dans les machines dotées d'un schéma de commande préprogrammée il est possible d'automatiser ce processus de résolution successive. On rappelle que tout changement d'échelle ne concerne que les valeurs numériques des coefficients de transfert des opérateurs. Donc le travail du schéma de commande automatique est programmé en fonction de la partition de l'intervalle $[0, t^*]$

de telle sorte que soient connectées les entrées des opérateurs assurant les coefficients de transfert requis, aux portions correspondantes de l'intervalle, les commutations nécessaires étant effectuées à l'aide des contacts des relais du dispositif de commande préprogrammée.

Le deuxième type est une fonction $\mu(t)$ continue sur l'intervalle $[0, t^*]$. Le plus souvent $\mu(t) = \exp \lambda t$, où λ est un nombre dont le signe et la grandeur dépendent du problème posé. On préfère une fonction exponentielle car elle s'exprime de façon simple au moyen de ses dérivées, ce qui est important dans la résolution d'équations différentielles.

Voyons comment on se sert de l'échelle $m_x(t) = M_x \exp \lambda t$. Soit à résoudre le problème de Cauchy

$$x' = -5x, \quad x(0) = 1, \tag{4.11}$$

sur l'intervalle $t \in [0, 2]$.

Montrons tout d'abord qu'il est pratiquement impossible de simuler la fonction $x(t)$ par la méthode d'échelle constante en raison de la valeur élevée de la variation relative de $x(t)$ sur l'intervalle

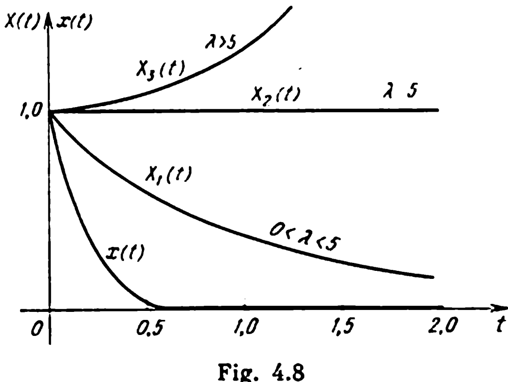


Fig. 4.8

$[0, 2]$. La solution de l'équation est $x(t) = \exp(-5t)$. La variation relative de $x(t)$ sur $[0, 2]$, égale à $\frac{x(0)}{x(2)} = \exp 10 = 22\,026$, est un nombre énorme qui dépasse de plusieurs fois le facteur de qualité de tout calculateur analogique. En fait, la fonction $x(t)$ sera représentée par zéro sur l'intervalle $[1, 2]$ (fig. 4.8).

Introduisons maintenant une échelle variable en remplaçant la fonction $x(t)$ par $X(t) = x(t) \exp \lambda t$, où λ est un nombre positif. Pour restituer la nouvelle variable $X(t)$ on cherche une équation différentielle dont elle serait solution. Exprimant $x(t)$ en fonction de $X(t)$ et $\exp \lambda t$ et tenant compte de l'équation initiale, on obtient

le nouveau problème de Cauchy $X'(t) = (\lambda - 5) X(t)$, $X(0) = 1$, qui admet pour solution $X(t) = \exp(\lambda - 5) t$. En choisissant convenablement λ, on arrive toujours à reproduire la variable $X(t)$ sur l'intervalle donné [0, 2]. La figure 4.8 montre l'allure des courbes $X(t)$ pour différentes valeurs de λ.

On calcule les valeurs de $x(t)$ à l'aide de la formule

$$x(t) = \frac{u_x(t)}{M_x \cdot \mu(t)}.$$

§ 3. Choix de l'échelle de la variable indépendante

La variable indépendante des calculateurs analogiques est le temps. Le choix des échelles des variables dépendantes entraîne automatiquement celui de la variable indépendante. L'unité de la variable indépendante initiale est la seconde du temps machine, puisque l'échelle est égale à

$$m_t = 1 \left[\frac{\text{seconde}}{\text{unité de mesure de la variable}}\right].$$

Un cas important sur le plan terminologique est celui où la variable indépendante du problème posé est également le temps. L'échelle est alors une grandeur adimentionnée. Si $m_t = 1$, on dit que la machine résout le problème en temps réel. Cela signifie que le processus physique et son modèle se déroulent à la même vitesse. La possibilité de reproduire sur machine des processus en *temps réel* est très importante dans la mesure où elle permet d'associer la machine à divers systèmes réels pour les commander ou étudier leurs propriétés. Si la durée de simulation d'un processus est inférieure à la durée réelle, on dit que la machine fonctionne en *temps accéléré*. Il est alors évident que $m_t > 1$. Lorsque le chercheur s'intéresse aux détails du processus étudié et choisit une échelle $m_t < 1$, on dit que le calculateur travaille en *temps ralenti*.

Les notions de temps réel, accéléré et ralenti sont visiblement dépourvues de sens pour les problèmes dans lesquels le rôle de la variable indépendante incombe à d'autres grandeurs physiques. On ne peut alors parler que d'une plus ou moins grande durée de résolution du problème sur la machine.

La variation de la durée de résolution du problème est primordiale dans le choix de l'échelle de la variable indépendante, et fait essentiel, elle n'est liée qu'à celle des coefficients de transfert des intégrateurs. Ceci étant, il n'est pas nécessaire de changer l'échelle des variables dépendantes.

Voyons maintenant comment la valeur du coefficient de transfert de l'intégrateur est liée à la durée de résolution d'un problème quelconque. La figure 4.9, *a* représente un intégrateur dont la varia-

ble de sortie est désignée par $x(t)$. La variable d'entrée est naturellement $-\dot{x}(t)$. Or $\dot{x}(t)$ n'est autre que la vitesse de variation de la variable $x(t)$. En changeant le coefficient de transfert de l'intégrateur, on peut aisément modifier la vitesse de variation de $x(t)$. La figure 4.9, *b* représente un intégrateur dont la vitesse de variation de la variable $x(t)$ est 10α fois plus grande que celle de l'intégrateur de la figure 4.9, *a*. Plus la vitesse de variation de toutes les variables

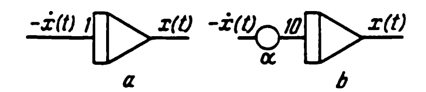


Fig. 4.9

machine est élevée, plus rapidement est délivrée la solution et vice versa. Les variations de la durée de résolution ne dépendent que des valeurs des coefficients de transfert des intégrateurs.

Voici une importante règle pratique. *Pour augmenter la durée de résolution du problème de m fois (ou ce qui revient au même multiplier l'échelle de la variable indépendante par 1/m) il suffit de multiplier les coefficients de transfert de tous les intégrateurs et d'eux seuls par 1/m.*

Il est évident qu'il n'est question ici que des intégrateurs utilisés dans le schéma délivrant la solution du problème posé.

§ 4. Questions et exercices

1. Quels critères essentiels doit remplir le langage de programmation?
2. Quelles sont les particularités des organigrammes?
3. Quelle est la fonction des principales étapes de la programmation des calculateurs analogiques?
4. Décrire et comparer un schéma fonctionnel et un schéma de commutation.
5. Expliquer le sens des critères que doit satisfaire le choix des échelles des variables mathématiques dépendantes ?
6. Pourquoi est-il besoin d'adapter les échelles des variables dépendantes?
7. Décrire les principes des échelles constantes et des échelles variables des variables dépendantes.
8. Comment évalue-t-on les valeurs maximales des variables mathématiques lors du choix de l'échelle?
9. Comment s'effectue le choix de l'échelle variable?

10. Quels sont les traits particuliers du choix de l'échelle d'une variable indépendante?

11. Comment peut-on modifier la durée de résolution d'un problème sur calculateur analogique?

12. Pour les schémas de la figure 2.33, positions 5 à 10, et les schémas de la figure 2.34, augmenter puis diminuer de deux fois le temps de résolution.

13. Expliquer la nécessité de construire des schémas de contrôle du fonctionnement d'un calculateur analogique?

14. Expliquer le sens des relations de contrôle.

15. Quel est le principe de l'organisation du contrôle avec les variables redondantes?

CHAPITRE 5

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES SUR MACHINE

§ 1. Performances du calculateur analogique

Les calculateurs analogiques modulaires sont le mieux adaptés à la résolution des équations différentielles ordinaires. Cette propriété est très importante, car la plupart des équations différentielles qui présentent un intérêt pratique ne sont pas solubles analytiquement. La classification actuelle des équations différentielles constate l'absence d'une méthode unique de résolution analytique. Les équations différentielles sont groupées en classes dès qu'on leur a trouvé un procédé unique de résolution analytique. La situation est différente dans la programmation des calculateurs. Il existe ici une méthode unique de programmation pour la résolution des équations différentielles. A vrai dire, telle quelle cette méthode générale n'est valable que pour les équations différentielles résolues par rapport à la dérivée supérieure. Si l'équation initiale n'est pas résolue par rapport à la dérivée supérieure, alors par des procédés spéciaux on la ramène à une forme à laquelle on puisse appliquer la méthode générale ou bien à une équation différentielle d'ordre supérieur résolue par rapport à la dérivée supérieure.

Les calculateurs analogiques ne sont pas adaptés à la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, car seule une grandeur physique, le temps, peut jouer le rôle de variable machine indépendante. Cependant, il existe des équations différentielles aux dérivées partielles qui peuvent être ramenées à des systèmes équivalents d'équations différentielles ordinaires. Dans les cas où cette transformation équivalente est impossible, on approche l'équation aux dérivées partielles par un système adéquat d'équations différentielles ordinaires.

D'après sa conception même le calculateur analogique ne reproduit que les solutions particulières des équations différentielles ordinaires sous forme d'une tension électrique variable dans le temps. Donc, pour étudier la dépendance de la solution d'une équation différentielle par rapport à un paramètre quelconque de cette équation, il faut la résoudre sur la machine pour différentes valeurs de ce paramètre.

On appelle *problème de Cauchy* le problème qui consiste à trouver la solution de l'équation différentielle

$$y^{(n)} = F\,[y^{(n-1)},\ y^{(n-2)},\ \ldots,\ y',\ y,\ t]$$

qui vérifie les conditions

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (5.1)$$

où $y_0,\ y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ sont des nombres donnés.

Pour les équations d'ordre supérieur ($n > 2$) on pose des *problèmes aux limites* où les conditions imposées à la solution sont données aux extrémités de l'intervalle sur lequel elle est cherchée. Ces conditions s'appellent *conditions aux limites*. Les équations différentielles avec conditions aux limites décrivent des processus limités dans l'espace ou dans le temps.

Les calculateurs analogiques ne résolvent que des problèmes de Cauchy. Si l'on a à résoudre des problèmes aux limites, on les ramène préalablement à un problème de Cauchy équivalent. Cette opération s'appelle *réduction* du problème aux limites à un problème de Cauchy.

Le domaine de variation de la variable indépendante t peut être l'intervalle $[0, t^*]$ ou la demi-droite $[0, \infty]$ selon la nature du phénomène étudié. Dans le premier cas il est nécessaire d'organiser un régime d'arrêt programmé. Il consiste à provoquer l'arrêt automatique de la machine à l'instant même où la variable indépendante prend la valeur t^*. Dans le deuxième cas, il est généralement impossible de générer la solution. Mais souvent l'étude d'un phénomène ne présente de l'intérêt que pour des valeurs élevées de t. Pour cela le temps de génération de la solution est pris égal à $T_{\max}$ et on se sert de l'échelle accélérée de représentation de la variable indépendante. Par ailleurs, par une transformation convenable, on peut toujours réduire la demi-droite $[0, \infty]$ à l'intervalle fini $[0, 1]$. Si l'on pose $\tau = 1 - \exp(-t)$, $\tau = \frac{t}{1+t}$, où τ est une nouvelle variable indépendante, on constate que la demi-droite $[0, \infty]$ s'applique sur l'intervalle $[0, 1]$. A noter toutefois que la première fonction est plus facile à réaliser sur machine.

Parfois le système ou le phénomène étudié n'est pas décrit par une seule équation différentielle, mais par plusieurs, chacune régissant son comportement dans une partie déterminée du domaine de variation des variables. Dans ces cas on dit que le système possède une *structure variable*. Pour résoudre ces problèmes sur machine, il faut prévoir l'exécution d'opérations logiques nécessaires à l'organisation d'un régime de commutation programmée qui consiste à brancher automatiquement la machine sur la résolution d'une autre équation différentielle dès que l'on atteint la frontière du domaine de définition de l'équation précédente.

La précision des solutions des équations différentielles dépend de la machine. Plus celle-ci est précise, plus la solution le sera. Cependant il existe des équations différentielles dont les solutions sont sensibles aux erreurs de la machine quelque petites qu'elles soient. Ces équations sont appelées équations à *solutions instables.* L'erreur affectant la solution croît avec la durée de résolution.

§ 2. Stabilité des solutions d'équations différentielles

Supposons que l'on étudie un processus sur machine et que la solution de l'équation différentielle qui le décrit est instable. Cela veut dire que de faibles variations des conditions initiales modifient profondément la solution. D'où la nécessité de procéder à des analyses complémentaires pour mettre en évidence les causes de cette instabilité. Arrêtons-nous sur trois d'entre elles.

La première cause résulte de la non-correspondance du modèle mathématique du processus au processus lui-même : en effet, lorsqu'on décrit un processus on est inévitablement conduit à le simplifier et à l'idéaliser. Il peut arriver que les hypothèses admises soient mal choisies et que les facteurs essentiels au déroulement du processus aient été omis.

La deuxième cause tient au schéma utilisé pour la réalisation d'un modèle, même exact, du processus. Il s'avère, et on le prouvera plus loin sur un exemple concret, qu'avec certains schémas fonctionnels, même la réalisation d'équations différentielles à solutions stables peut conduire à des solutions instables. C'est le cas lorsque de petites erreurs des opérateurs en s'accumulant faussent l'équation différentielle initiale à un point tel que l'équation différentielle réalisée se retrouve avec des solutions instables.

La troisième cause est liée à la méthode de réalisation du problème choisi. Les conditions qui favorisent l'apparition de solutions instables se manifestent dans les problèmes dont la position mathématique initiale ne permet pas d'utiliser immédiatement la machine. Dans ces problèmes on passe de la position initiale à un système équivalent d'équations différentielles qui est réalisé sur la machine. La méthode choisie pour cette transposition mathématique réserve parfois des surprises assez désagréables, savoir qu'on peut obtenir des équations différentielles à solutions instables.

Définissons avec plus de rigueur la notion de stabilité d'une solution d'une équation différentielle.

On dit qu'une solution $y(t)$ $(0 < t < \infty)$ *d'une équation, ou d'un système d'équations différentielles est stable lorsque* $t \to \infty$ *si quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que pour toutes les autres solutions* $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ *de l'équation, ou du système, vérifiant la*

condition $|\tilde{y}(0) - y(0)| < \delta$, *l'on ait*

$$|\tilde{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \text{ pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

Autrement dit les solutions $\tilde{y}(t)$ voisines de $y(t)$ à l'instant initial le resteront aussi longtemps que l'on veut et seront disposées dans un ε-voisinage de la solution $y(t)$ en forme de tube (fig. 5.1). On dit qu'une solution stable $y(t)$ est *asymptotiquement stable* si existe

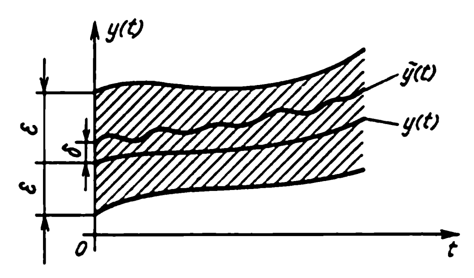


Fig. 5.1

un $\Delta > 0$ tel que toutes les solutions vérifiant la condition $|\tilde{y}(0) - y(0)| < \Delta$ soient telles que

$$\lim_{t \to \infty} |\tilde{y}(t) - y(t)| = 0.$$

Donc si la stabilité est asymptotique, une partie des solutions stables $\tilde{y}(t)$ tend vers la solution $y(t)$ et a tendance à se confondre avec elle pour $t \to \infty$.

Signalons qu'on appelle *asymptotiquement équivalentes* des fonctions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ telles que

$$\lim_{t \to \infty} |y_1(t) - y_2(t)| = 0.$$

La stabilité des solutions des équations différentielles linéaires est la plus aisée à établir. Citons quelques résultats relatifs aux solutions d'équations différentielles linéaires.

1. Pour qu'une solution de l'équation différentielle linéaire et non homogène

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + a_2(t) y^{(n-2)} + \ldots + a_n(t) y = \varphi(t) \qquad (5.2)$$

soit stable (resp. asymptotiquement stable) il faut et il suffit que soit stable (resp. asymptotiquement stable) l'équation différentielle homogène associée

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + a_2(t) y^{(n-2)} + \ldots + a_n(t) y = 0. \qquad (5.3)$$

2. La solution générale de l'équation différentielle linéaire (5.2) est asymptotiquement stable si et seulement si la solution triviale $y(t) \equiv 0$ de l'équation homogène associée (5.3) est asymptotiquement stable lorsque $t \to \infty$.

3. Pour qu'une solution de l'équation différentielle homogène et linéaire à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{5.4}$$

soit stable, il est nécessaire et suffisant que toutes les racines

$$z_j = \alpha_j + i\beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.5}$$

de l'équation caractéristique correspondante

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{5.6}$$

possèdent des parties réelles non positives, i.e. $\alpha_j \leqslant 0$ pour tous les $j = 1, 2, \ldots, n$.

4. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution de l'équation différentielle linéaire et homogène à coefficients constants (5.4) soit stable est que les parties réelles de toutes les racines (5.5) de l'équation caractéristique (5.6) soient négatives, i.e. $\alpha_j < 0$ pour tous les $j = 1, 2, \ldots, n$.

Sur un intervalle borné de variation de la variable indépendante, la machine permet de réaliser des équations différentielles à solutions stables comme à solutions instables. Mais s'agissant d'équations à solutions instables, l'erreur qui affecte la solution risque de grandir démesurément avec la durée de l'intégration.

EXEMPLE 1. *Résoudre le problème de Cauchy*

$$y''(t) = 10y'(t) + 11y(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

sur l'intervalle $t \in [0, 2]$.

La solution générale est

$$y(t) = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp(+11t),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires qui, dans le cas présent, sont égales respectivement à 1 et 0. Une solution particulière exacte est $y(t) = \exp(-t)$. La solution débitée par la machine sera forcément approchée à cause des erreurs et égale à :

$$\tilde{y}(t) = (1 + \varepsilon_1) \exp(-t) + \varepsilon_2 \exp(+11t),$$

où ε_1 et ε_2 sont des constantes petites en valeur absolue qui dépendent du facteur de qualité de la machine. L'erreur absolue de la solution est

$$\Delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = -\varepsilon_1 \exp(-t) - \varepsilon_2 \exp(+11t).$$

L'erreur relative

$$\delta y(t) = \frac{\Delta y(t)}{y(t)} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \exp(+12t).$$

Supposons que le facteur de qualité de la machine soit tel que $\varepsilon_1 = \pm 10^{-4}$ et $\varepsilon_2 = \pm 10^{-4}$. Pour $t = 2$, l'erreur vaut

$$\Delta y(2) \approx 10^{-4} \exp(22) \approx 4{,}5 \cdot 10^4 \quad \text{et} \quad \delta y(2) \approx 10^{-4} \exp(24) \approx 2{,}7 \cdot 10^5.$$

La solution exacte vaut $y(2) = \exp(-2) = 0{,}1353$.

Donc, même si l'on utilise une très bonne machine, on voit que la solution qu'elle fournit n'a rien de commun avec la solution exacte.

Exemple 2. *Intégrer sur l'intervalle $t \in [0, 1]$ le problème de Cauchy*

$$y''(t) = -0{,}9y'(t) + 0{,}1y(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

La solution générale est $y(t) = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp 0{,}1\,t$. En tenant compte des conditions initiales on obtient la solution particulière exacte $y(t) = \exp(-t)$. La machine délivre la solution approchée

$$\tilde{y}(t) = (1 + \varepsilon_1) \exp(-t) + \varepsilon_2 \exp(+0{,}1t).$$

Les erreurs absolue et relative de la solution ont pour expressions

$$\Delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = -\varepsilon_1 \exp(-t) - \varepsilon_2 \exp(+0{,}1t),$$

$$\delta y(t) = \frac{\Delta y(t)}{y(t)} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \exp(+1{,}1t).$$

Pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$ et $t = 1$ les erreurs sont respectivement égales à:

$$\Delta y(1) = -10^{-4} \exp(-1) - 10^{-4} \exp(+0{,}1) \approx -1{,}5 \cdot 10^{-4},$$

$$\delta y(1) = -10^4 (1 + 3{,}004) \approx -4 \cdot 10^{-4}.$$

Dans cet exemple, les erreurs sont petites, on peut donc les négliger sur l'intervalle $t \in [0, 1]$. Mais en dehors de cet intervalle, les erreurs croissent rapidement avec t pour devenir prépondérantes devant la solution.

L'exposé précédent confirme le fait que l'instabilité de la solution de l'équation différentielle n'est pas en soi un obstacle à sa génération par la machine sur un intervalle borné de définition de la variable indépendante. L'essentiel c'est que les erreurs restent petites devant la solution sur l'intervalle en question. Ceci dépend aussi bien de l'équation différentielle que de la durée d'intégration. Ceci étant, les solutions instables seront délivrées avec une précision de beaucoup inférieure à celle des solutions stables.

7—0654

Rappelons que les erreurs globales des opérateurs peuvent conduire à une solution instable même si l'équation différentielle initiale possède une solution stable.

Illustrons ce qui précède sur un exemple concret, un exemple qui pourrait paraître un peu artificiel, mais qui donne une idée exacte du fond. Soit à intégrer l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(t) = -(\alpha + \beta)\, y(t) \tag{5.7}$$

avec la condition initiale

$$y(0) = y_0.$$

La stabilité de sa solution $y(t) = y_0 \exp[-(\alpha + \beta)\, t]$ est évidente. La figure 5.2, *a* et *b* représente deux schémas fonctionnels qui, en principe, doivent générer la solution avec les mêmes chances de

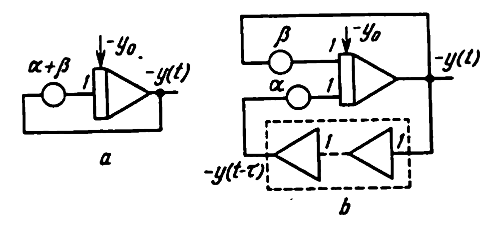


Fig. 5.2

succès. Mais contrairement au premier, le second possède deux boucles de contre-réaction, dont l'une est représentée par un groupe d'opérateurs qui réalisent la transformation identique de la variable d'entrée $-y(t)$. Ce groupe d'opérateurs est encadré par un pointillé sur la figure. En principe, la transformation identique de la variable d'entrée $-y(t)$ peut être réalisée par tout circuit comportant un nombre pair d'inverseurs montés en série. On supposera que cette boucle de contre-réaction est « longue », i.e. est constituée d'un grand nombre d'opérateurs. Or chaque opérateur (cf. § 2, chapitre 2) introduit un retard et est à post-action. Dans un circuit de contre-réaction long, le retard τ de la variable de sortie par rapport à la variable d'entrée $-y(t)$ peut être bien important. Si donc l'on tient compte du retard, il est clair que le second schéma ne réalise pas l'équation (5.7), mais l'équation

$$y'(t) + \beta y(t) + \alpha y(t - \tau) = 0, \tag{5.8}$$

que l'on appelle *équation différentielle linéaire à argument retardé.*

Il s'avère que la solution de l'équation (5.8) est instable pour certains α, β et τ. L'étude de la stabilité des solutions des équations différentielles linéaires à argument retardé est bien plus complexe

que celle de la stabilité des solutions des équations différentielles linéaires.

Si dans les équations différentielles linéaires la stabilité de la solution est évaluée d'après le signe des parties réelles des racines de l'équation caractéristique (5.7), dans l'équation (5.8) il faut estimer le signe de la partie réelle des racines d'une équation transcendante de la forme

$$z+\beta+\alpha\exp(-\tau z)=0. \tag{5.9}$$

La difficulté est que l'équation (5.9) risque de posséder une infinité de racines. Mais il existe un domaine de valeurs τ et α où les racines de l'équation (5.9) ne possèdent pas de parties réelles positives. Citons sans la démontrer la condition d'existence à l'équation (5.9) de racines à parties réelles négatives. Cette condition s'écrit:

$$\tau<\frac{\pi-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\gamma^2-1}}{\beta\sqrt{\gamma^2-1}}, \tag{5.10}$$

où

$$\gamma=\frac{\alpha}{\beta}.$$

La figure 5.3 est une interprétation graphique de (5.10) dans le cas où $\beta=1$. On voit que la courbe

$$\tau=\frac{\pi-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

partage le premier quadrant en deux régions. L'inégalité (5.10) est vérifiée en tout point intérieur de la région hachurée. Donc la solution délivrée par la machine d'après le schéma 5.2, *b* est stable. Aux points de l'autre région correspondent des solutions instables.

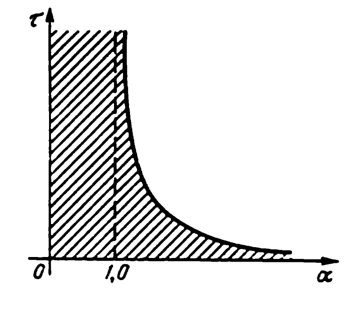


Fig. 5.3

Les conditions de stabilité telles que (5.10) permettent de tirer une conclusion importante sur la nécessité de borner les valeurs maximales des coefficients de transfert des opérateurs. Dans la programmation des calculateurs analogiques on tient compte de ce fait en prenant les coefficients de transfert inférieurs à 20. L'usage de coefficients de transfert relativement peu grands permet de négliger le retard en raison de son insignifiance. Mais il ne faut pas toujours le négliger.

L'instabilité est encore liée à une forme assez désagréable de retard. Dans certains schémas à retard et contre-réactions, on risque

de voir apparaître des oscillations « parasites », dont l'amplitude et la période dépendent du retard et du processus simulé. Le comportement des systèmes à contre-réaction fait l'objet d'une étude détaillée en théorie de la commande automatique. Nous l'omettrons ici. Cependant on remarquera que l'amplitude des oscillations « parasites » croît avec le retard et les coefficients de transfert des opérateurs.

§ 3. Méthode générale de programmation des calculateurs analogiques pour équations différentielles résolues par rapport à la dérivée supérieure

L'épithète « générale » indique simplement que la méthode de programmation est largement utilisée pour la résolution d'une vaste classe d'équations différentielles et de systèmes d'équations différentielles linéaires et non linéaires.

La mise au point du schéma fonctionnel se fait en six étapes que nous allons considérer pour le problème de Cauchy

$$y^{(n)} - F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t] = 0;$$
$$y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \dots, y'(0) = y'_0, \; y(0) = y_0. \qquad (5.11)$$

E t a p e I. On résout l'équation initiale par rapport à la dérivée supérieure, i.e. on la ramène à la forme

$$y^{(n)} = F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t]. \qquad (5.12)$$

E t a p e II. On représente la partie du schéma fonctionnel qui comporte un nombre d'intégrateurs montés en série égal à l'ordre de l'équation différentielle (fig. 5.4, *a*).

E t a p e III. La variable d'entrée de la chaîne d'intégrateurs est désignée par $y^{(n)}$, les variables de sortie de chaque intégrateur sont notées de gauche à droite (fig. 5.4. *b*). L'alternance des signes des variables de sortie est due à la propriété d'inversion des intégrateurs.

E t a p e IV. On construit le schéma qui réalise le second membre de l'équation (5.12), i.e.

$$F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t].$$

L'aspect de ce schéma dépend de l'expression analytique de la fonction $F[\cdot]$. Dans le cas général considéré, le schéma n'est pas concrétisé et est représenté par un rectangle portant une inscription appropriée (fig. 5.4, *c*).

E t a p e V. La sortie du schéma réalisant la fonction $F[\cdot]$ est appliquée à l'entrée du premier intégrateur de la chaîne. Mathématiquement cela veut dire que le second membre de l'équation (5.12) est égal au premier (fig. 5.4, *d*).

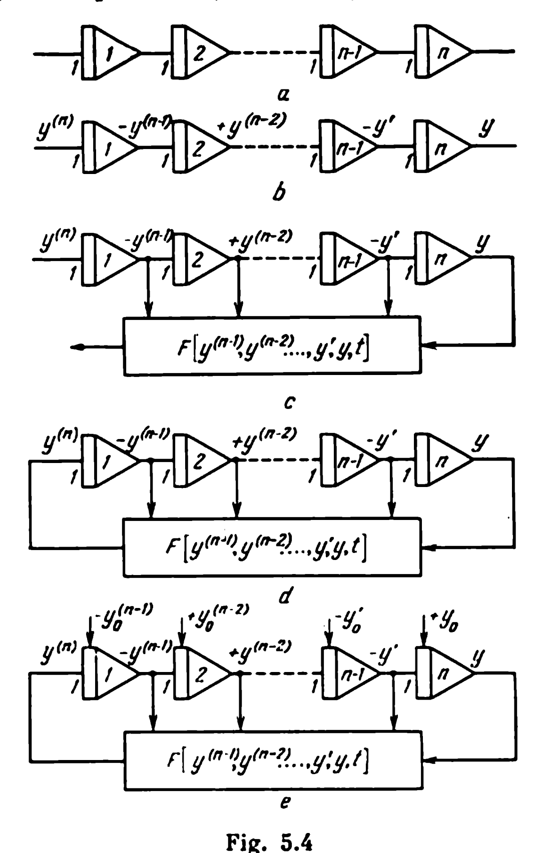


Fig. 5.4

E t a p e VI. On donne à tous les intégrateurs les conditions initiales correspondantes pour obtenir en définitive le schéma fonctionnel qui délivre la solution de l'équation différentielle initiale (fig. 5.4, *e*).

Appliquons cette méthode à des exemples concrets.

EXEMPLE 1. *Etablir le schéma fonctionnel qui délivre la solution de l'équation différentielle linéaire non homogène du second ordre à coefficients constants*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \tag{5.13}$$

vérifiant les conditions initiales $y'(0) = y'_0$, $y(0) = y_0$.

E t a p e I. On résout l'équation (5.13) par rapport à la dérivée supérieure

$$y''(t) = -a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t). \qquad (5.14)$$

E t a p e II. On dessine une chaîne de deux intégrateurs montés en série (fig. 5.5, *a*).

E t a p e III. On désigne la variable d'entrée de la chaîne d'intégrateurs par $y''(t)$ et on note les variables de sortie de chaque

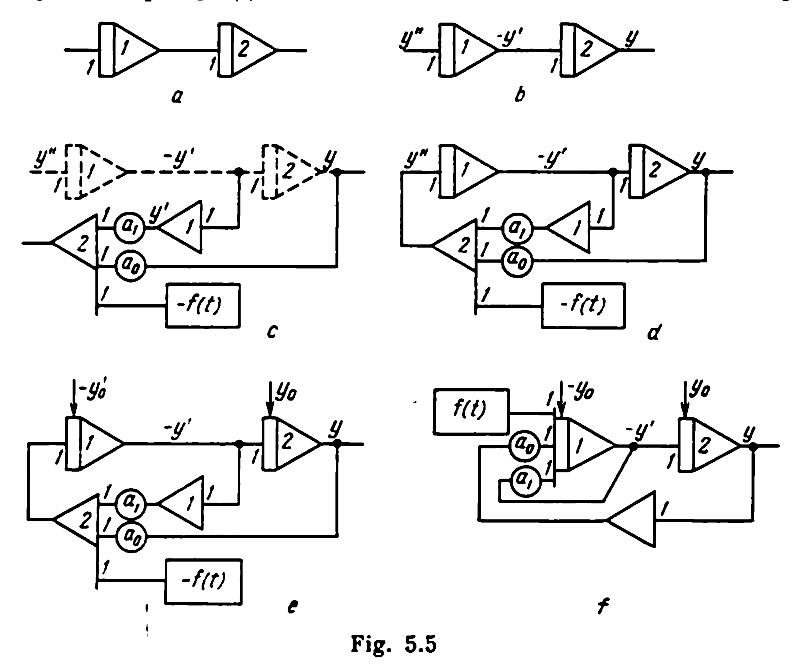


Fig. 5.5

intégrateur de gauche à droite (fig. 5.5, *b*) Autrement dit, on établit une relation entre les variables $y(t)$ et $y'(t)$ et les intégrateurs qui les délivrent.

E t a p e IV. On établit le schéma qui génère le second membre de l'équation (5.14). On suppose qu'il existe un générateur qui délivre la fonction donnée $f(t)$. Ce schéma est représenté sur la fig. 5.5, *c* par un trait ininterrompu. Il est composé d'un inverseur *1*, d'un sommateur *2* et du générateur délivrant la fonction $-f(t)$. A la sortie du sommateur on obtient la somme $-a_1y'(t) - a_0y(t) + f(t)$.

E t a p e V. On établit un circuit de contre-réaction de la sortie du sommateur *2* à l'entrée de l'intégrateur *1* (fig. 5.5, *d*). Mathématiquement cette contre-réaction traduit l'égalité du second et du premier membre de l'équation (5.14).

Étape VI. On procède à la donnée des conditions initiales. Le signe de la condition initiale doit correspondre à celui de la variable de sortie de l'intégrateur.

Le schéma fonctionnel de la figure 5.5, *e* résout l'équation initiale (5.13). Il permet d'étudier les variables $y''(t)$, $y'(t)$, $y(t)$. Si le comportement de la variable $y''(t)$ ne présente pas d'intérêt, on peut singulièrement simplifier ce schéma en excluant le sommateur *2*, ce qui donne le schéma de la figure 5.5, *f*. Dans ce dernier, les fonctions du sommateur *2* et de l'intégrateur *1* sont cumulées par le sommateur intégrateur *1*. Ce cumul entraîne une économie de matériel au prix d'une réduction de l'information sur la solution. Dans le schéma 5.5, *f* la variable $y''(t)$ n'existe pas sous forme explicite.

On peut contrôler le fonctionnement de la machine lorsqu'elle résout l'équation (5.13) d'après le schéma fonctionnel 5.5, *f* à l'aide de la méthode de la variable redondante (§ 1, chapitre 4). En se donnant la relation de contrôle sous la forme

$$y'(t) + a_1 y(t) - z(t) = 0,$$

où $z(t)$ est une variable redondante auxiliaire, et en dérivant par rapport à la variable t on obtient

$$y''(t) + a_1 y'(t) - z'(t) = 0.$$

D'où compte tenu de (5.13), on obtient l'équation différentielle en la variable redondante

$$z'(t) = -a_0 y(t) + f(t), \quad z(0) = y'_0 + a_1 y_0.$$

A signaler que le schéma de contrôle nécessite un intégrateur pour la génération de la variable $z(t)$ et un sommateur pour la réalisation de la relation de contrôle.

EXEMPLE 2. *Composer le programme de génération de la solution de l'équation différentielle*

$$y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y^2(t) = f(t)$$

qui vérifie les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

Le schéma fonctionnel délivrant la solution de cette équation est représenté sur la figure 5.6. Il se distingue par le fait qu'il met en jeu un opérateur pour générer chaque coefficient variable et un multiplieur pour faire le produit de la variable par ce coefficient. Pour restituer la fonction $y^2(t)$ on s'est servi d'un multiplieur, mais on aurait pu fort bien faire appel à un générateur fonctionnel. Mais ici le générateur fonctionnel est à déconseiller, car il faudrait le

prérégler sur la génération d'une parabole du second degré. Si la non-linéarité avait été d'une forme plus complexe l'utilisation d'un opérateur spécialisé aurait eu un sens.

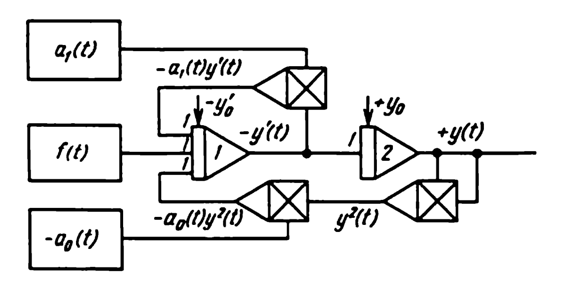


Fig. 5.6

On suit la même marche pour composer les schémas fonctionnels des systèmes d'équations différentielles.

Exemple 3. *Etablir le schéma fonctionnel de réalisation du système d'équations différentielles avec les conditions initiales*

$$\begin{aligned}
&x_1''(t) + \alpha_{11}x_1(t) - \alpha_{12}\varphi_1(x_2) = 0,\\
&x_2'''(t) - \alpha_{21}\varphi_2(x_1) + \alpha_{22}x_2(t) = 0,\\
&x_1'(0) = x_{10}', \quad x_1(0) = x_{10},\\
&x_2''(0) = x_{20}'', \quad x_2'(0) = x_{20}', \quad x_2(0) = x_{20}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

C'est un système d'équations différentielles non linéaires dont la première est du second ordre, la seconde du troisième. La non-linéarité est due aux fonctions $\varphi_1(x_2)$ et $\varphi_2(x_1)$.

Etape I. Les deux équations du système (5.15) sont solubles par rapport à la dérivée supérieure et par conséquent on peut les ramener à une forme qui permet d'établir facilement le schéma fonctionnel

$$\begin{aligned}
&x_1''(t) = -\alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}\varphi_1(x_2),\\
&x_2'''(t) = \alpha_{21}\varphi_2(x_1) - \alpha_{22}x_2(t).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Etape II. Pour la première équation on dessine une chaîne de deux intégrateurs montés en série et pour la seconde une chaîne de trois intégrateurs, compte tenu de l'ordre de ces équations.

Etape III. A l'entrée de la première chaîne on applique imaginairement la variable $x_1''(t)$ et à l'entrée de la deuxième chaîne, la variable $x_2'''(t)$. On établit ainsi une correspondance entre les variables et les sorties des intégrateurs (fig. 5.7).

E t a p e IV. En se servant des variables $x_1(t)$, $x_1'(t)$, $x_2(t)$, $x_2'(t)$, $x_2''(t)$ on construit les schémas fonctionnels générant les seconds membres des équations (5.16) (fig. 5.8).

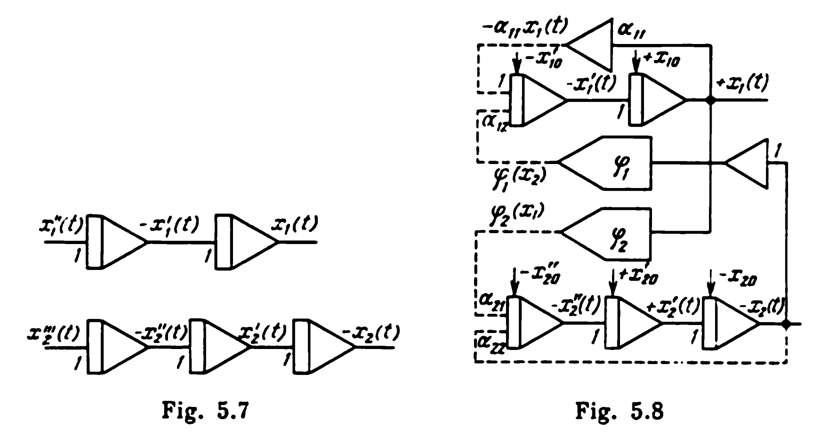


Fig. 5.7 Fig. 5.8

E t a p e V. On boucle les contre-réactions correspondant aux seconds membres des équations (5.16).

E t a p e VI. On donne les conditions initiales à tous les intégrateurs en tenant compte des signes de leurs variables de sortie.

Cette méthode générale de composition des schémas fonctionnels est parfois appelée *méthode d'abaissement de l'ordre de la dérivée* pour souligner par là même l'importance des deux premières étapes.

§ 4. Programmation des calculateurs analogiques pour équations non résolues par rapport à la dérivée supérieure

Soit donné le problème de Cauchy d'ordre n

$$F(x^{(n)}, \mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

où $\mathbf{x} = \{x^{(n-1)}, \ldots, x^{(j)}, \ldots, x\}$ et $\mathbf{x}_0 = \{x_0^{(n-1)}, \ldots, x_0^{(j)}, \ldots \ldots, x_0\}$, l'équation différentielle n'étant pas résolue par rapport à la dérivée supérieure. Pour appliquer la méthode générale de programmation on procède comme suit.

1. Soit on ramène, si cela est possible, l'équation donnée à la forme $x^{(n)} + \Phi(x^n, \mathbf{x}, t) = 0$. Cette nouvelle équation n'est pas résolue non plus par rapport à la dérivée supérieure, mais on peut lui appliquer la méthode générale.

2. Soit on se sert de la méthode des fonctions implicites. On rappelle que celle-ci a été examinée partiellement au § 9, chapitre 2, et qu'elle sera rigoureusement exposée au § 2, chapitre 10.

En vertu de cette méthode on passe du problème de Cauchy d'ordre n à un problème de Cauchy d'ordre $n+1$ dans lequel l'équation différentielle est résolue par rapport à la nouvelle dérivée supérieure :

$$x^{(n+1)} = -KF(x^{(n)}, x, t) \operatorname{sign} F'_{x^{(n)}}, \quad x(0) = x_0, \quad x^{(n)}(0) = 0, \tag{5.17}$$

où K est le gain de l'AO, la dérivée $F'_{x^{(n)}}$ est supposée non nulle. On a introduit le signe de la dérivée partielle $F'_{x^{(n)}}$ pour obtenir une solution stable.

L'équation différentielle (5.17) étant résolue par rapport à la dérivée supérieure, on lui appliquera la méthode générale de program-

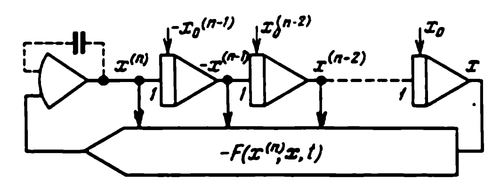


Fig. 5.9

mation des calculateurs analogiques. La figure 5.9 représente le schéma fonctionnel correspondant au cas $F'_{x^{(n)}} > 0$. Le premier intégrateur de la chaîne est un AO soumis à une contre-réaction à travers un condensateur de faible capacité.

Considérons à titre d'exemple le problème suivant : étant donnée une fonction $x(t)$ trouver les fonctions $m(t)$ et $z(t)$ telles que

$$m(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(t)\, dt, \tag{5.18}$$

$$z(t) = \frac{1}{t} \int_0^t [x(t) - m(t)]^2\, dt. \tag{5.19}$$

La fonction $m(t)$ est appelée moyenne instantannée, la fonction $z(t)$, variance. Pour générer les fonctions $m(t)$ et $z(t)$ on aura intérêt à résoudre deux équations différentielles linéaires du premier ordre non résolues par rapport aux dérivées

$$tm'(t) + m(t) - x(t) = 0, \tag{5.20}$$

$$tz'(t) + z(t) - [x(t) - m(t)]^2 = 0, \tag{5.21}$$

$$m(0) = z(0) = 0.$$

Mettons les équations (5.20), (5.21) sous la forme (5.17). Pour cela il nous faut définir le signe des dérivées $\frac{\partial F_1}{\partial m'}$ et $\frac{\partial F_2}{\partial z'}$. Ici

$$F_1 [m'(t), m(t), x(t), t] = tm'(t) + m(t) - x(t) = 0,$$

$$F_2 [z'(t), z(t), x(t), t] = tz'(t) + z(t) - [x(t) - m(t)]^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial F_1}{\partial m'} = t \geqslant 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z'} = t \geqslant 0.$$

En vertu de (5.17) il faut réaliser sur le calculateur le système d'équations différentielles vérifiant les conditions initiales

$$m''(t) = -K [tm'(t) + m(t) - x(t)], \tag{5.22}$$

$$z''(t) = -K [tz'(t) + z(t) - [m(t) - x(t)]^2], \tag{5.23}$$

$$m(0) = z(0) = 0, \quad m'(0) = z'(0) = 0.$$

La figure 5.10 représente le schéma fonctionnel construit d'après les équations (5.22) et (5.23).

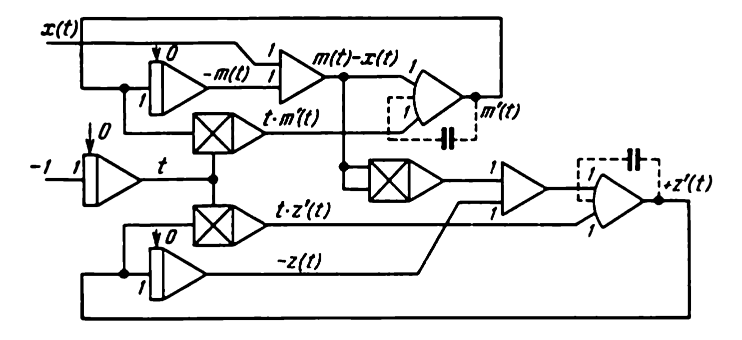


Fig. 5.10

On aura profit à contrôler le fonctionnement du calculateur pendant la génération de $m(t)$ et $z(t)$ d'après le schéma 5.10 à l'aide de l'expression

$$y(t) - t [m(t) + z(t)] = 0,$$

où $y(t)$ est une variable redondante auxiliaire. En dérivant l'expression de contrôle par rapport à t, on obtient

$$y'(t) - [m(t) + z(t)] - t [m'(t) + z'(t)] = 0.$$

D'où, et compte tenu du système initial d'équations différentielles, on obtient l'équation différentielle qui définit $y(t)$:

$$y'(t) = [x(t) - m(t)]^2.$$

3. Soit enfin on fait appel à la paramétrisation. Dans l'équation différentielle

$$F(y^{(n)}, \mathbf{y}, x) = 0, \quad x = x_0, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

toutes les variables dépendantes $y^{(n)}$, $\mathbf{y} = \{y^{(n-1)}, \ldots, y\}$ et la variable indépendante x sont considérées comme des fonctions d'une nouvelle variable t (le paramètre). L'introduction d'une variable supplémentaire, même si elle élève d'une unité l'ordre de l'équation différentielle initiale, conduit souvent à une nouvelle équation différentielle résolue par rapport à la dérivée supérieure. Illustrons le principe de ce procédé sur un exemple simple.

L'équation du premier ordre non linéaire et à variables séparables

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

possède une solution analytique simple $x^2 + y^2 = 1$ (pour $x = 0$, $y = 1$). L'équation n'étant pas soluble par rapport à $\frac{dy}{dx}$ car $\lim\limits_{y\to 0}\frac{dy}{dx} = \infty$, la variable $\frac{dy}{dx}$ n'est pas réalisable sur machine au voisinage de $y = 0$. Paramétrisons les variables x et y; pour cela mettons l'équation initiale sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

C'est une équation du premier ordre. Elle est équivalente au système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1,$$

dont la réalisation sur machine est aisée. Le passage de l'équation initiale au système d'équations linéaires pour la paramétrisation des variables x et y n'est pas univoque. D'une façon générale on obtient le système

$$\frac{dy}{dt} = -\psi(x, y, t)\,x, \quad \frac{dx}{dt} = \psi(x, y, t)\,y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1,$$

où $\psi(x, y, t) \neq 0$ est une fonction arbitraire dont les valeurs définissent la vitesse et le signe, la direction du mouvement du point représentatif sur la courbe intégrale $x^2 + y^2 = 1$.

Exposons dans le cas général la méthode de paramétrisation pour une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d}{dx}\left(u\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right) = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{5.24}$$

Posant $z = u\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)$ et résolvant l'équation $z - u\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$ par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on obtient le système d'équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x,\ y,\ z)}{w(x,\ y,\ z)},\qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x,\ y,\ z),$$

qui est prêt pour une paramétrisation des variables x, y, z à l'aide de t. Ici $v(x,\ y,\ z)$ et $w(x,\ y,\ z)$ sont des fonctions quelconques. En considérant les variables x, y, z comme des fonctions du paramètre t, on obtient le système cherché

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \psi(x,\ y,\ t)\, v(x,\ y,\ z),\\ \frac{dx}{dt} &= \psi(x,\ y,\ t)\, w(x,\ y,\ z),\\ \frac{dz}{dt} &= \psi(x,\ y,\ t)\, w(x,\ y,\ t)\, \varphi(x,\ y,\ z), \end{aligned} \tag{5.25}$$

dans lequel la fonction arbitraire $\psi(x,\ y,\ t) \neq 0$ représente la vitesse et la direction de la courbe intégrale $y(x)$ en cours de réalisation sur la machine.

Illustrons cette méthode sur l'équation différentielle de Laguerre

$$x = \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1 - x)\frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$$

pour

$$x = x_0,\quad \left.\frac{dL_n}{dx}\right|_{x_0} = L'_{n0},\quad L_n(x_0) = L_{n0}.$$

Ramenons cette équation à la forme (5.24)

$$\frac{d}{dx}\left(x\left(\frac{dL_n}{dx} - L_n\right)\right) = -(n+1)\, L_n.$$

Posant $z = x\left(\frac{dL_n}{dx} - L_n\right)$ on obtient un système propre à la paramétrisation

$$\begin{aligned} \frac{dL_n}{dx} &= \frac{xL_n + z}{x},\\ \frac{dz}{dx} &= -(n+1)\, L_n, \end{aligned}$$

qui prend la forme paramétrique

$$\frac{dL_n}{dt} = -xL_n - z, \quad L_n(0) = L_{n0};$$
$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad x(0) = x_0;$$
$$\frac{dz}{dt} = (n+1)\,xL_n, \quad z(0) = x_0(L'_{n0} - L_{n0}),$$

où la fonction arbitraire ψ $(x, y, t) = -1$.

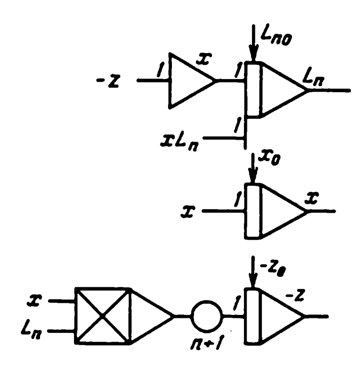


Fig. 5.11

La figure 5.11 représente le schéma fonctionnel correspondant à ce système d'équations différentielles.

§ 5. Programmation des calculateurs analogiques pour équations renfermant des dérivées au second membre

Les ingénieurs sont souvent confrontés à des équations différentielles dont le second membre est une combinaison linéaire de la forme $\sum_{j=0}^{m} b_j(t)\, x^{(j)}(t)$, où $b_j(t)$ sont des variables données ou des coefficients constants, et $x^{(j)}(t)$ la dérivée j-ème par rapport à t de la fonction donnée $x(t)$. Citons comme exemple le problème de Cauchy

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y) = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\, x^{(j)}(t),$$
$$y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \ \ldots, \ y'(0) = y'_0, \quad y(0) = y_0, \quad m \leqslant n, \qquad (5.26)$$

ou encore le problème suivant de Cauchy

$$y'''(t)+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_0x(t)+b_1x'(t)+b_2x''(t),$$
$$y''(0)=y_0'',\quad y'(0)=y_0',\quad y(0)=y_0. \tag{5.27}$$

L'application directe de la méthode générale à l'équation (5.26) ou (5.27) fournit un schéma fonctionnel qui n'est pas commode, car il implique la génération des dérivées de la fonction $x(t)$. Montrons que dans beaucoup de cas on peut éviter de générer les dérivées de $x(t)$ en ramenant les équations différentielles (5.26), (5.27) à des systèmes équivalents d'équations différentielles ne renfermant pas les dérivées de la fonction $x(t)$. Pour fixer les idées, considérons l'équation (5.27). Mettons-la pour commencer sous la forme d'une somme de dérivées totales

$$y'''(t)+[a_2y(t)-b_2x(t)]''+[a_1y(t)-b_1x(t)]'+$$
$$+[a_0y(t)-b_0x(t)]=0. \tag{5.28}$$

Maintenant intégrons (5.28) deux fois de suite. La première intégration donne

$$y''(t)+[a_2y(t)-b_2x(t)]'+[a_1y(t)-b_1x(t)]+z_1(t)=0,$$

où $z_1(t)$ est déduit de $z_1'(t)=a_0y(t)-b_0x(t)$. La deuxième intégration donne

$$y'(t)+[a_2y(t)-b_2x(t)]+z_2(t)=0,$$

où $z_2(t)$ est obtenu à partir de $z_2'(t)=a_1y(t)-b_1x(t)+z_1(t)$. On obtient en définitive le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} z_1'(t)&=a_0y(t)-b_0x(t),\\ z_2'(t)&=a_1y(t)-b_1x(t)+z_1(t),\\ y'(t)&=-a_2y(t)+b_2x(t)-z_2(t) \end{aligned} \tag{5.29}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} z_1(0)&=-y_0''-[a_2y_0'-b_2x'(0)]-[a_1y_0-bx(0)],\\ z_2(0)&=-y_0'-[a_2y_0-b_2x(0)],\\ y(0)&=y_0. \end{aligned}$$

On remarque que le système (5.29) ne contient pas de dérivées de la fonction $x(t)$, donc $x(t)$ peut être d'une forme assez arbitraire et présenter même des discontinuités de première espèce. La figure 5.12 représente le schéma fonctionnel correspondant au système (5.29) et construit d'après la méthode générale. Le système d'équations différentielles (5.29) est appelé *forme canonique* de l'équation (5.27).

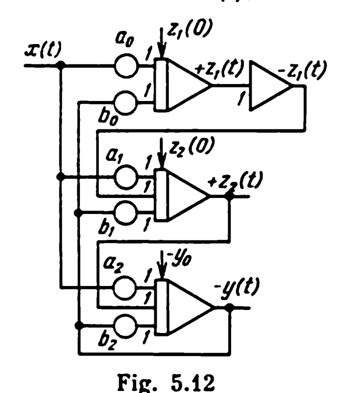


Fig. 5.12

On ne peut pas mettre sous forme canonique toute équation différentielle à second membre (5.26). La forme canonique n'existe que pour des équations (5.26) susceptibles d'être mises sous forme d'une somme de dérivées totales de divers ordres. Cette condition est remplie par les équations différentielles linéaires et par certaines équations non linéaires. Ainsi, l'équation différentielle linéaire

$$y''(t)+a_1(t)\,y'(t)+a_0(t)\,y(t)=b_0(t)\,x(t)+b_1(t)\,x'(t)+b_2x''(t)$$

se met sous forme d'une somme de dérivées totales. Or

$$a_1(t)\,y'(t)=[a_1(t)\,y(t)]'-a_1'(t)\,y(t);$$
$$b_1(t)\,x'(t)=[b_1(t)\,x(t)]'-b_1'(t)\,x(t),$$

donc

$$[y(t)-b_2x(t)]''+[a_1(t)\,y(t)-b_1(t)\,x(t)]'+\\+[a_0(t)-a_1'(t)]\,y(t)+[b_1'(t)-b_0(t)]\,x(t)=0.$$

De façon analogue l'équation différentielle non linéaire

$$y''(t)+y'(t)\sin y(t)+ay(t)=b_0x(t)+b_1(t)\,x'(t)$$

s'écrit sous la forme d'une somme de dérivées totales. Or

$$-y'(t)\sin y(t)=[\cos y(t)]',\quad b_1(t)\,x'(t)=[b_1(t)\,x(t)]'-b_1'(t)\,x(t),$$

donc

$$y''(t)-[\cos y(t)+b_1(t)\,x(t)]'+[ay(t)+b_1'(t)\,x(t)-b_0x(t)]=0.$$

§ 6. Sensibilité des solutions à la variation des paramètres

Soit donnée l'équation différentielle

$$F(\ddot{x},\ \dot{x},\ x,\ t,\ a)=0, \tag{5.30}$$

où a est un paramètre. Discuter la solution $x(t,\ a)$ en fonction du paramètre a. Sur machine ce problème peut être résolu de deux façons.

La première consiste à composer, d'après l'équation (5.30), un organigramme qui donnera la solution. Les coefficients de transfert des opérateurs du schéma s'expriment de toute évidence en fonction du paramètre a. En se donnant une collection de valeurs distinctes du paramètre a, soit $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, on fait varier les coefficients de transfert des opérateurs et on reproduit sur machine les solutions correspondantes:

$$x(t,\ a_0),\ x(t,\ a_1),\ x(t,\ a_2),\ \ldots,\ x(t,\ a_n).$$

La seconde consiste à évaluer approximativement l'influence de la variation du paramètre sur la solution. Cette méthode porte le nom de méthode des *fonctions de sensibilité*. Supposons que pour $a = a_0$ la solution de l'équation (5.30) est $x(t,\ a_0)$. Donnons un accroissement Δa au paramètre a_0 et établissons une correspondance entre la solution $x(t,\ a_0)$ et la solution $x(t,\ a_0+\Delta a)$. Utilisons à cet effet le développement de Taylor. En se limitant aux deux premiers termes on obtient l'expression approchée de $x(t,\ a_0+\Delta a)$ en fonction $x(t,\ a_0)$:

$$x(t,\ a_0+\Delta a)\approx x(t,\ a_0)+\frac{\partial x(t,\ a_0)}{\partial a}\Delta a.$$

La dérivée partielle $u(t,\ a_0)=\frac{\partial x(t,\ a_0)}{\partial a}$ s'appelle *fonction de sensibilité*. On peut l'employer pour évaluer l'effet de l'accroissement Δa du paramètre sur la solution de l'équation (5.30). A noter que la fonction de sensibilité est facile à générer sur machine car elle est toujours solution d'une équation différentielle linéaire. L'équation qui admet pour solution la fonction de sensibilité s'appelle *équation différentielle de sensibilité*. Pour la trouver il suffit de dériver l'équation différentielle initiale (5.30) par rapport au paramètre a:

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\frac{\partial \ddot{x}}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}+\frac{\partial F}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}=0.$$

Or

$$\frac{\partial x}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}=u(t);\qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}=\dot{u}(t);$$

$$\frac{\partial \ddot{x}}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}=\ddot{u}(t),$$

donc

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\ddot{u}(t)+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{u}(t)+\frac{\partial F}{\partial x}u(t)+\frac{\partial F}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}=0. \tag{5.31}$$

Si l'équation initiale (5.30) contient plusieurs paramètres, à chacun d'eux correspondent une fonction de sensibilité et une équation différentielle de sensibilité.

Illustrons ce qui précède sur l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{x}+b_1\dot{x}+b_0x-f(t)=0. \tag{5.32}$$

Au paramètre b_0 sont associées la fonction de sensibilité $u_0 = \left.\frac{\partial x}{\partial b_0}\right|_{b_0=b_{00}}$ et l'équation de sensibilité

$$\ddot{u}_0+b_1\dot{u}_0+b_0u_0+x(t)=0,\ \ u_0(0)=\dot{u}_0(0)=0. \tag{5.33}$$

De façon analogue, au paramètre b_1 correspondent la fonction de sensibilité $u_1=\left.\frac{\partial x}{\partial b_1}\right|_{b_1=b_{10}}$ et l'équation différentielle:

$$\ddot{u}_1+b_1\dot{u}_1+b_0u_1+\dot{x}(t)=0,\quad u_1(0)=\dot{u}_1(0)=0. \tag{5.34}$$

On remarquera que les équations différentielles (5.32), (5.33), (5.34) coïncident aux fonctions $-f(t)$, $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ près. L'identité de forme des équations (5.33) et (5.34) permet d'étudier la sensibilité

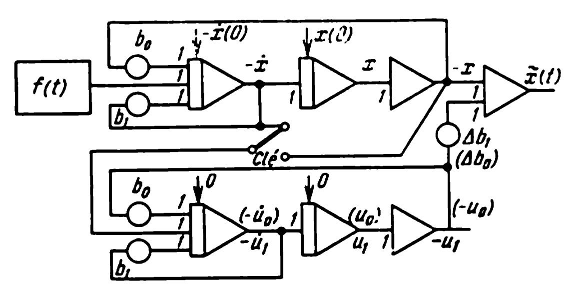


Fig. 5.13

de la solution aux paramètres b_0 et b_1 à l'aide d'un seul schéma fonctionnel, celui qui est représenté sur la figure 5.13. Ce schéma est constitué de deux parties. La partie supérieure résout l'équation différentielle initiale. La partie inférieure délivre la fonction de sensibilité u_0 ou u_1 selon la position occupée par le commutateur *Clé*. Les variables de sortie des deux schémas sont appliquées au som-

mateur. La variable de sortie du schéma supérieur, $-x$, accède directement au sommateur. La variable de sortie du schéma inférieur arrive au sommateur à travers un potentiomètre dont le rapport est numériquement égal à l'accroissement Δb_0 (ou Δb_1) du paramètre. Le sommateur délivrera la fonction

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t),$$

où

$$\Delta x(t) = \frac{\partial x}{\partial b_0}\bigg|_{b_0=b_{00}} \Delta b_0 \text{ ou } \Delta x(t) = \frac{\partial x}{\partial b_1}\bigg|_{b_1=b_{10}} \Delta b_1.$$

§ 7. Représentation des solutions d'équations différentielles

La solution d'une équation différentielle doit être délivrée par la machine sous une forme commode à l'étude.

Il existe un appareil mathématique d'étude des solutions qui est bien élaboré et qui fait appel à l'espace des phases. Les instruments d'observation visuelle utilisés dans les calculateurs analogiques permettent de surveiller les éléments de cet espace.

1. **Espace des phases.** En étudiant les divers systèmes dynamiques on représente souvent par un graphe les solutions des équations différentielles qui décrivent le système. Considérons deux procédés courants de représentation graphique.

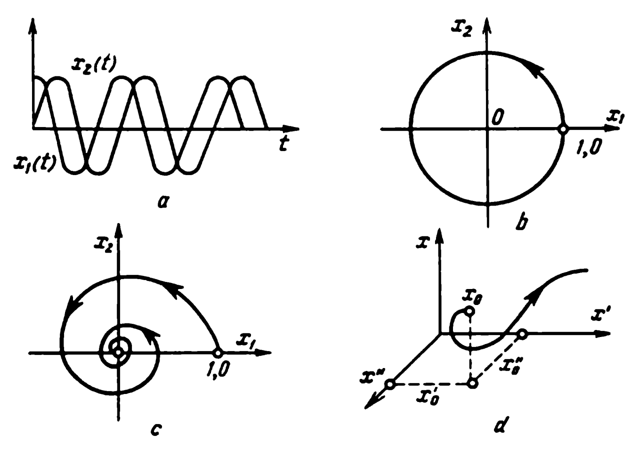


Fig. 5.14

Le premier consiste à représenter toutes les variables dépendantes comme des fonctions du temps. Ces graphes des courbes intégrales sont appelés *oscillogrammes*. La figure 5.14, *a* représente les oscil-

logrammes des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$, solutions du système d'équations différentielles linéaires

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2, & x_1(0) &= 1, \\ x_2' &= x_1, & x_2(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Le deuxième procédé est différent. On choisit un système de coordonnées cartésiennes sur les axes duquel on porte les valeurs instantanées des variables correspondantes. On obtient ainsi un espace dont chaque point figure l'état du système dynamique à l'instant donné. C'est l'espace des phases. La dimension de l'espace des phases du système dynamique est définie par l'ordre de l'équation différentielle du système. La figure 5.14, *b* représente le plan de phase du système dynamique décrit par les équations (5.35). A la solution $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$ correspond la trajectoire d'un point mobile sur le plan x_1ox_2. La trajectoire est appelée *trajectoire de phase*, le point mobile *point représentatif*. Le sens du mouvement du point représentatif est généralement indiqué par des flèches sur la trajectoire de phase. La figure 5.14, *c* représente la trajectoire de phase du système dynamique décrit par les équations

$$x_1' = -0{,}2x_1 - x_2, \quad x_2' = x_1 - 0{,}2x_2$$

pour l'état initial $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. On remarque que le système dynamique tend vers l'état $x_1 = x_2 = 0$.

La figure 5.14, *d* représente la trajectoire de phase d'un système dynamique décrit par une équation différentielle du troisième ordre $x''' = F(x'', x', x)$ avec les conditions initiales

$$x''(0) = x_0'', \quad x'(0) = x_0', \quad x(0) = x_0.$$

L'interprétation graphique du comportement du système dynamique par une trajectoire de phase est bien plus suggestive que celle des oscillogrammes. L'allure de la famille des trajectoires de phase (ou comme on dit encore le portrait de phase du système dynamique) permet souvent de tirer de très importantes conclusions sur les propriétés du système. Il existe même une théorie mathématique, dénommée théorie géométrique ou qualitative des équations différentielles, qui étudie les équations différentielles à l'aide de l'espace des phases.

2. **Instruments d'observation visuelle des solutions d'équations différentielles.** Comme appareils d'observation on utilise des oscilloscopes cathodiques à plusieurs faisceaux (des indicateurs) avec écran à fluorescence rémanente. L'oscilloscope est capable de reproduire des oscillogrammes des courbes en nombre égal à celui des faisceaux. Sur les plaques de déviation verticale de l'oscilloscope on applique les variables machine correspondantes, et sur les plaques de déviation horizontale une tension électrique à croissance linéaire, produite par un bloc spécial de balayage situé à l'intérieur de l'appareil.

Si l'on applique la variable x_2 (t) sur les plaques de déviation verticale et x_1 (t) sur les plaques de déviation horizontale, on reproduira la trajectoire de phase $x_2 = f(x_1)$ du système dynamique sur le plan x_1ox_2. L'écran permet d'appliquer le plan de phase ou la projection de la trajectoire sur les plans coordonnées de l'espace des phases. Ainsi, en se servant d'un oscilloscope à double faisceau pour étudier la trajectoire de la figure 5.14, *d*, on peut observer simultanément ses projections $x' = f_1(x)$, $x'' = f_2(x)$ sur l'écran. La première fonction est la projection sur le plan $x'ox$, la seconde, la projection sur le plan $x''ox$. L'observation visuelle des trajectoires de phase est importante dans la mesure où elle permet de comparer les résultats de la théorie qualitative des équations différentielles avec le comportement du système dynamique étudié. L'observation visuelle est très répandue en théorie de la commande automatique, en radiotechnique théorique et en électronique.

On peut rendre encore plus suggestive la représentation de l'espace des phases sur l'écran si l'on représente la trajectoire de phase x (t) et ses projections x' (t), x'' (t) en axonométrie, comme sur la figure 5.14, *d*. Dans le plus simple des cas on peut le faire à l'aide de la transformation affine

$$Y(t) = x(t) - 0{,}35x''(t), \qquad X(t) = x'(t) - 0{,}35x''(t)$$

qui définit la perspective axonométrique dans laquelle l'axe de la variable auxiliaire Y (t) est confondu avec l'axe x (t) sur le plan YOX, et l'axe X (t) avec l'axe x' (t) de l'espace des phases $Oxx'x''$. La variable Y (t) est appliquée sur les plaques de déviation verticale, et la variable X (t) sur les plaques de déviation horizontale. Les constructions axonométriques seront étudiées dans le détail dans le cours pratique faisant suite au présent ouvrage.

§ 8. Choix de l'échelle des variables dépendantes par la méthode des problèmes d'échelle. Exemple

En étudiant les questions liées à la simulation des équations différentielles sur machine nous nous sommes arrêtés au niveau des schémas fonctionnels. Nous allons examiner maintenant un exemple de composition de programme qui sera détaillé au niveau des schémas de commutation, avec le choix des échelles des variables dépendantes et indépendante. Le fait de connaître la signification physique des variables permet d'une façon générale de simplifier l'étape la plus complexe de la programmation : le choix des échelles.

1. **Position du problème.** On demande de construire le schéma de commutation pour l'étude du mouvement d'un point matériel de

masse m dans un milieu plan s'opposant au déplacement sous l'action d'une force attractive appliquée en un centre fixe O (fig. 5.15, *a*). Deux forces sont donc en jeu. La force d'attraction du point par le centre : $P = -rm\omega^2$ (on remarque qu'elle est directement proportionnelle à la distance r du point au centre) et la résistance du milieu

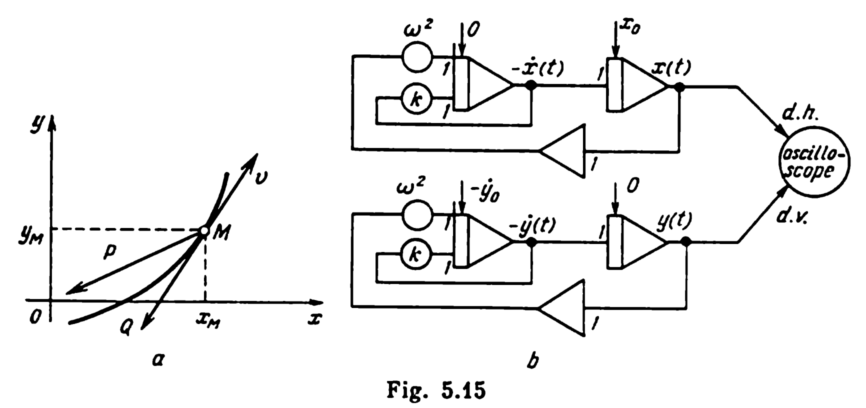


Fig. 5.15

au mouvement : $Q = -kmv$. Cette force est proportionnelle à la vitesse v du point. k et ω^2 sont des coefficients de proportionnalité.

2. Déduction des équations différentielles du mouvement. Avant d'étudier un phénomène physique sur machine il faut le décrire mathématiquement. La seconde loi de Newton donne ici

$$X = m\ddot{x}, \quad Y = m\ddot{y}, \tag{5.36}$$

où X et Y sont des forces agissant le long des axes de coordonnées, m la masse du point, $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ les accélérations du point matériel le long des axes x et y.

Trouvons les équations différentielles qui décrivent le mouvement du point dans un système de coordonnées cartésien xOy. Supposons qu'à l'instant t le point se trouve en M. Définissons les composantes des forces P et Q portées par les axes x et y :

$$\left.\begin{aligned} X_P &= -m\omega^2 r\frac{x}{r} = -m\omega^2 x, \\ Y_P &= -m\omega^2 r\frac{y}{r} = -m\omega^2 y, \\ X_Q &= -mk\dot{x}, \\ Y_Q &= -mk\dot{y}. \end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

$$X = X_P + X_Q, \quad Y = Y_P + Y_Q. \tag{5.38}$$

Compte tenu de (5.37) et (5.38) les équations différentielles (5.36) s'écrivent

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - k\dot{x}, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y - k\dot{y}. \tag{5.39}$$

Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, le point occupe la position $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ et que sa vitesse est $\dot{x}(0) = x_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Le contrôle de la machine pendant la résolution de (5.39) se réalise aisément à l'aide de l'expression

$$kx + \dot{x} + ky + \dot{y} - z = 0,$$

où z est une variable redondante. Une dérivation de l'expression de contrôle par rapport à la variable t donne

$$\dot{z} = k\dot{x} + \ddot{x} + k\dot{y} + \ddot{y}.$$

D'où, et compte tenu de (5.39), on obtient l'équation différentielle

$$\dot{z} = \omega^2 (x + y), \quad z(0) = kx_0 + \dot{y}_0$$

qui nous donnera la variable redondante.

3. Construction du schéma fonctionnel. La figure 5.15,*b* représente le schéma fonctionnel correspondant au système linéaire d'équations différentielles (5.39). Le schéma a été construit par la méthode générale et comprend des opérateurs linéaires, des sommateurs et des intégrateurs. Les variables x et y sont appliquées respectivement sur les plaques de déviation verticale et horizontale de l'oscilloscope. Sur l'écran on obtient la trajectoire mobile du point $y = \varphi(x)$.

4. Choix des échelles des variables dépendantes (méthode des problèmes d'échelle). Le choix de l'échelle consiste à passer des variables mathématiques initiales aux variables machine, i.e. aux tensions électriques. Aux variables x, $\dot{x}$, $\dot{y}$, y correspondent les tensions électriques $u_{x0} = m_{x0}x$, $u_{x1} = m_{x1}\dot{x}$, $u_{y0} = m_{y0}y$, $u_{y1} = m_{y1}\dot{y}$, où m_{x0}, m_{x1}, m_{y0}, m_{y1} sont les échelles. Les formules (4.4) avec lesquelles se calculent les échelles font intervenir la valeur maximale de la variable. Ainsi pour la variable x l'échelle vaut $m_{x0} = 100/|x_{max}|$.

Le choix de l'échelle est compliqué par la nécessité de connaître *a priori* les valeurs maximales x_{max}, $\dot{x}_{max}$, y_{max}, $\dot{y}_{max}$. Cette difficulté peut être éludée soit par la méthode des *échelles d'essai*, qui sont ensuite précisées (§ 5, chapitre 4), soit par la méthode des *problèmes d'échelle*.

Penchons-nous sur la méthode des problèmes d'échelle. Son application au choix des échelles des variables est séduisante dans la mesure où elle permet d'exprimer les échelles en fonction des paramètres du problème initial. Elle offre donc la possibilité de

construire des schémas de commutation capables de résoudre de nombreux problèmes différant entre eux par la valeur numérique des paramètres.

Le principe de la méthode consiste à passer du problème initial à un autre, mathématiquement plus simple, mais ayant le même contenu physique. Ce problème similaire porte le nom de *problème d'échelle*. Il est important que le problème d'échelle admette une solution analytique simple, dont l'analyse permette de tirer des conclusions justes sur les limites de variation des variables du problème initial.

Simplifions le problème étudié. Supposons que le milieu ne s'oppose pas au mouvement du point. Il est évident que $k = 0$ et l'on a alors

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0.$$

Le problème d'échelle a pour solution

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \quad y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t. \tag{5.40}$$

En vertu de (5.40) les valeurs maximales des variables seront

$$|x_{\max}| = x_0; \quad |\dot{x}_{\max}| = \omega |x_0|; \quad |y_{\max}| = |\dot{y}_0|/\omega; \quad |\dot{y}_{\max}| = |\dot{y}_0|.$$

Comparons maintenant le contenu physique des problèmes. Le problème d'échelle décrit le mouvement d'un point matériel dans le vide. Dans le problème initial, la résistance du milieu, de par sa nature, ne peut conduire à un accroissement des valeurs maximales des vitesses et des déplacements du point le long des axes de coordonnées. Donc, pour calculer les échelles, il est logique de prendre les valeurs maximales des variables du problème d'échelle pour bornes supérieures de variation des variables du problème étudié.

Le calcul des échelles est conduit dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1

Variable	Valeur absolue maximale de la variable	Echelle	Symbole de l'échelle
x	$\|x_0\|$	$100/\|x_0\|$	m_{x0}
$\dot{x}$	$\omega\|x_0\|$	$100/(\omega\|x_0\|)$	m_{x1}
y	$\|\dot{y}_0\|/\omega$	$100\omega/\|\dot{y}_0\|$	m_{y0}
$\dot{y}$	$\|\dot{y}_0\|$	$100/\|\dot{y}_0\|$	m_{y1}

5. Etablissement des schémas de commutation. Le schéma de commutation est construit pour une machine donnée, dans notre cas pour le calculateur MH-7.

Contrairement au schéma fonctionnel, le schéma de commutation est élaboré non pas pour des variables mathématiques mais pour les variables machine.

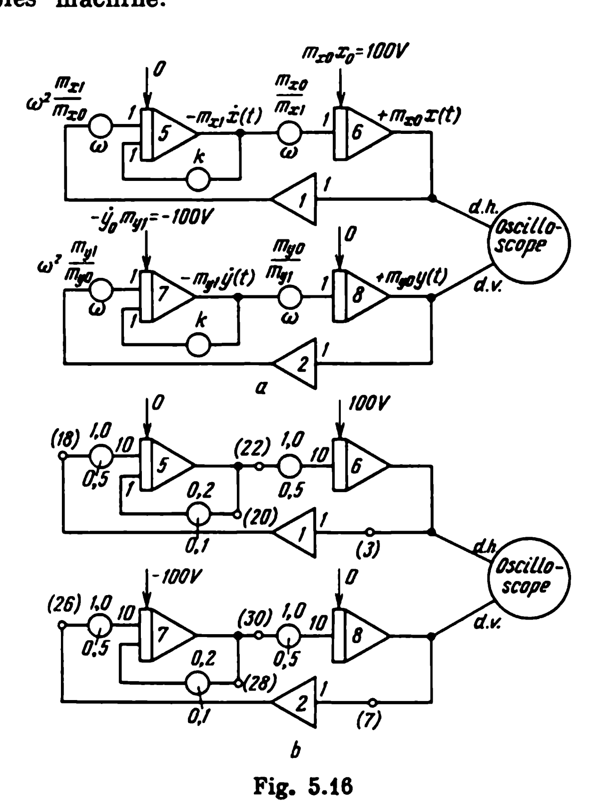


Fig. 5.16

La figure 5.16, *a* représente un schéma de commutation. On y a noté les numéros des intégrateurs que l'on suppose utiliser. Les potentiomètres montés à l'entrée des intégrateurs 6 et 8 servent à l'adaptation des échelles des variables $\dot{x}(t)$, $x(t)$ et $\dot{y}(t)$, $y(t)$. Les potentiomètres de rapport ω placés à l'entrée des intégrateurs 5 et 7 assurent l'adaptation des échelles des variables d'entrée et de sortie des intégrateurs et donnent aussi les coefficients ω^2, k.

Le schéma de commutation est générique et permet d'étudier le mouvement du point matériel sur machine quels que soient les paramètres ω et *k*. Si ces derniers prennent des valeurs concrètes,

par exemple $\omega = 5$, $k = 0{,}1$, le schéma de commutation qui leur correspond peut être complété par l'indication des numéros des entrées des opérateurs. La figure 5.16, *b* représente le schéma correspondant.

6. **Choix de l'échelle de la variable indépendante (le temps).** La particularité du phénomène physique évoluant dans le temps est précisément que la variable indépendante est le temps. Dans les calculateurs analogiques, la variable indépendante est toujours le temps. Donc il y a coïncidence de la variable indépendante du problème initial et de la variable indépendante machine.

Si donc l'on résout le problème sur machine d'après le schéma de commutation de la figure 5.16, *b*, le processus simulé se déroulera de la même façon et durera autant que le processus réel décrit par les équations (5.39). On rappelle que dans ce cas on dit que la solution est générée *en temps réel*. Si pour une raison ou une autre on a besoin de diminuer, de moitié par exemple, la durée du processus sur machine, en vertu du § 6, chapitre 4, il faudra doubler les coefficients de transfert de tous les intégrateurs retenus pour le problème en question et d'eux seuls. Dans ce cas on dit que la solution du problème est délivrée en temps accéléré. Sur la figure 5.16, *b* les coefficients de transfert correspondants sont notés au-dessus des potentiomètres.

Si, inversement, l'on a besoin de doubler la durée du processus sur machine, il faut diminuer de moitié les coefficients de transfert des intégrateurs.

7. **Discussion des résultats.** Si l'on observe sur un oscilloscope la trajectoire du mouvement du point matériel en coordonnées x, y, on peut mettre en exergue d'intéressantes propriétés du phénomène physique étudié.

On constate que pour $k = 0$ la trajectoire du mouvement est une ellipse de demi-axes x_0 et $\dot{y}_0/\omega$.

Si l'on fait croître k, on peut voir comment la trajectoire initialement fermée se transforme en spirale et comment le point matériel tend asymptotiquement vers le centre attractif O en l'enroulant.

Pour une certaine valeur de k qui dépend de ω, il arrive un moment où le point sans avoir effectué un tour complet tombe sur le centre attractif. Ceci correspond au mouvement dit apériodique.

§ 9. Questions et exercices

1. Quelles sont les équations différentielles les plus faciles à résoudre sur machine ?

2. Peut-on résoudre sur machine : a) des équations différentielles aux dérivées partielles ? b) des problèmes aux limites posés pour des équations différentielles ordinaires ?

3. La distribution stationnaire de la température dans une tige mince semi-infinie est décrite par l'équation différentielle

$$x''(t) - C^2 x(t) = 0,$$

où $x(t)$ est la température de la tige à la section d'abscisse t, $0 \leqslant t < \infty$; C^2 un coefficient constant.

Pour faciliter l'étude sur machine de la distribution de la température le long de la tige, procéder au changement de variable $\tau = 1 - \exp(-t)$ et ramener l'équation initiale à une équation qui décrive la distribution de la température sur l'intervalle fini $\tau \in [0, 1]$.

4. Quelles sont les équations différentielles dont la résolution sur machine conduit à l'établissement de schémas à structure variable ?

5. Comment se manifeste l'instabilité des solutions des équations différentielles réalisées sur machine ? Quelles sont les causes essentielles de cette instabilité ?

6. Peut-on générer sur machine les solutions instables des équations différentielles ?

7. Quel est l'inconvénient des contre-réactions « longues » dans les schémas des calculateurs?

8. Montrer que deux solutions particulières y_a, y_b de l'équation à solutions instables

$$y''(t) = 3y(t) + 2y'(t),$$

vérifiant les conditions initiales

a) $y_a(0) = 1, \quad y'_a(0) = -1,$

b) $y_b(0) = 1, \quad y'_b(0) = 3,$

n'ont pas le même comportement asymptotique par rapport à l'erreur, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \delta y_a(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \delta y_b(t) = \varepsilon,$$

où ε est une petite quantité dépendant du facteur de qualité du calculateur.

9. Montrer que deux solutions particulières y_a, y_b de l'équation différentielle à solutions stables

$$y''(t) = -3y(t) - 4y'(t),$$

vérifiant les conditions initiales

a) $y_a(0) = 1, \quad y'_a(0) = -1,$

b) $y_b(0) = 1, \quad y'_b(0) = -3,$

n'ont pas le même comportement asymptotique par rapport à l'erreur, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \delta y_a(t) = \varepsilon, \quad \lim_{t\to\infty} \delta y_b(t) = \infty.$$

10. Montrer que l'équation différentielle linéaire du premier ordre à argument retardé

$$y'(t) + by(t - \tau) = 0$$

possède une solution stable pour $0 < b < \frac{\pi}{2\tau}$.

11. Construire les schémas fonctionnels réalisant les solutions des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles donnés sous la forme du problème de Cauchy.

I n d i c a t i o n : Avant d'aborder les exercices 11 à 38 il est recommandé de travailler soigneusement le chapitre 8.

1) $y'' + 4y' + 3y = 0$.
2) $y'' + 2y' + 10y = 0$.
3) $y^{IV} + 16y = 0$.
4) $y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.
5) $y'' + 0{,}1y' + 2y = 0$.
6) $x' = -x + 3y, \quad y' = 3x - y$.
7) $x'' = -2x + 3y, \quad y'' = 3x - 2y$.
8) $x' = -3x + 2y - z, \quad y' = 2x - 3y - z, \quad z' = x - y - 3z$.
9) $x'' = 2x - 3y, \quad y'' = x - y$.
10) $x' = x - y, \quad y' = y - x$.
11) $y'' - 2y' - 3y = \exp(-t)$.
12) $y'' + 3y' + 2y = \sin t$.
13) $y'' + 2y' + y = t \exp(-t)$.
14) $y'' + 4y' + 4y = \cos^2 t$.
15) $y'' + 9y = \exp(-t) \cos t$.
16) $x' = -x + 3y + t, \quad y' = 3x - y + \operatorname{sh} t$.
17) $x' = x + 2y + t \exp(-t), \quad y' = 2x - 2y + \cos^2 t$.
18) $x' = -2x - y + t \exp(-2t), \quad y' = x + \exp(-t)$.
19) $x' = -x + 2y + \exp(-t), \quad y' = x + \sin t$.
20) $x' = -2x + 4y - t^2 \exp(-t), \quad y' = 3x - 6y$.
21) $y'' = -\sin^2 y$.
22) $y'' = -\sin y$.
23) $y' = -\exp(-y)$.

24) $y'' + ay' + \omega^2 \sin y = \sin t$.

25) $y'' = \exp(-y) \sin y$.

26) $y''^3 = y' + 1$.

27) $(t^2 + 1) y'' + ty' + ny = 0$.

28) $ty'' + (1 - t) y' + ny = 0$.

29) $[(1 + \sin^2 t) y'']'' = \exp(-t)$.

30) $\left[\frac{y''}{1+t}\right]'' = \exp \exp(-t)$.

31) $[1 - \exp(-t)] y'' + 2y' + y = 0$.

32) $yy' + 1 - y' = 0$.

33) $y' \cos y - 1 = 0$.

34) $y''' + a_2(t) y'' + a_0(t) y = b_0(t) x + b_1(t) x' + b_2(t) x''$.

35) $y'' + a_1(t) y' + f(y) = b_0 x + b_1(t) x^3$

36) $y'' + y' \cos y + \sin y = b_0 x + b_1(t) x^6$.

37) $y'' \sin 2y + 2 (y')^2 \cos 2y + a_1 y' + a_0 y = b_0(t) x + b_1(t) x' + b_2 x''$.

38) $(y' - y'') \exp(-y) + a_1(t) y' + a_0(t) y = b_0(t) x + b_2 x''$.

12. Supposons qu'un calculateur analogique imaginaire ne possède pas d'intégrateurs mais dispose d'une quantité suffisante de dérivateurs parfaits et d'autres opérateurs. On demande de simuler l'équation

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = 0; \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0.$$

13. Quelles sont les méthodes de discussion sur machine d'une solution d'une équation différentielle en fonction d'un paramètre de cette équation ?

14. Expliquer pourquoi les équations différentielles de sensibilité sont toujours linéaires.

15. Sous quelle forme les appareils de service du calculateur analogique permettent-ils d'obtenir les solutions des équations différentielles ?

16. Qu'est-ce qu'une trajectoire d'un système dynamique?

17. Expliquer en quoi est importante la position physique du problème simulant un phénomène physique.

18. Qu'est-ce qu'un problème d'échelle et comment est-il lié avec le phénomène physique étudié ?

19. Réaliser sur machine la trajectoire de phase du système

$$x'_1 = x_2 + x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2),$$
$$x'_2 = -x_1 + x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2).$$

On remarquera que lorsque $t \to \infty$ la trajectoire dégénère en le cercle $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Si l'origine $x_1(0)$, $x_2(0)$ de la trajectoire se trouve à l'intérieur du cercle, cette trajectoire tendra asymptotiquement vers le cercle en l'« enroulant » de l'intérieur. Si l'origine de la trajectoire se trouve en dehors du cercle, la trajectoire enroulera le cercle de l'extérieur. Les trajectoires de phase de cette nature sont appelées *cycles limites.*

20. Etudier sur machine l'évolution de la population du globe entre 1925 et 2025.

En vertu des données statistiques, la population de la terre entre 1925 et 2025 est approximativement décrite par l'équation différentielle de croissance rapide

$$x' = (k_0 + k_1 t)\, x, \quad x(0) = 1907 \text{ millions},$$

où $x(t)$ est la population du globe terrestre; t le temps compté en années à partir de 1925; $k_0 = 5{,}84 \cdot 10^{-3}$, $k_1 = 3{,}74 \cdot 10^{-4}$ des coefficients.

21. Simuler sur machine la propagation d'une maladie contagieuse qui s'est déclarée dans un village retiré, de 1000 habitants. A la découverte de l'épidémie 90 personnes étaient atteintes, donc étaient agents; 900 personnes étaient saines mais des malades potentiels; les 10 autres relevaient de cette maladie et étaient donc immunisées. Chaque malade contamine en moyenne une personne sur mille par jour. La maladie dure 10 jours, le convalescent est considéré comme immunisé.

La propagation de l'épidémie est décrite par le système d'équations différentielles avec les conditions initiales.

$$\begin{aligned} x' &= -\beta x y, & x(0) &= 900,\\ y' &= \beta x y - \gamma y, & y(0) &= 90,\\ z' &= \gamma y, & z(0) &= 10, \end{aligned}$$

où x est le nombre de malades potentiels; y celui des agents; z celui des guéris et immunisés; $\beta = 0{,}001$; $\gamma = 0{,}1$.

La marche à suivre est la suivante:

1) tracer la courbe épidémique $x'(t)$ qui caractérise la vitesse de propagation de la maladie; trouver le nombre maximum de malades (y_{max}) et la date de ce maximum; déterminer la durée de l'épidémie en considérant qu'elle prend fin lorsque 99,5 % de la population ont été contaminés;

2) mêmes questions que dans 1) mais à la condition qu'une intervention médicale (isolation partielle des malades et mesures préventives) ait réduit de moitié la contamination, i.e. $\beta = 0{,}0005$;

3) prévoir pendant l'élaboration des schémas fonctionnels et de commutation un système de contrôle du fonctionnement de la machine

à l'aide de l'identité évidente $x + y + z = 1000$; s'assurer de l'efficacité du système de contrôle.

22. Une île est peuplée de lynx et de lièvres. Les lièvres se nourrissent d'herbe qui pousse abondamment sur l'île. Les lynx se nourrissent de lièvres. L'évolution du nombre de lynx et de lièvres est décrite par le système d'équations différentielles

$$x'(t) = ax - bxy; \quad a, b > 0,$$
$$y'(t) = cxy - py, \quad c, p > 0,$$

où x est le nombre de lièvres exprimé en milliers, y le nombre de lynx exprimé en milliers, t le temps en années.

On demande : 1) de discuter la forme du système d'équations différentielles ; de trouver les conditions pour lesquelles la population animale ne change pas ;

2) de simuler la solution du système d'équations et la trajectoire de phase $y = \varphi(x)$ pour $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, $p = 5$ si à l'instant initial le nombre des lièvres est $x(0) = 8\,000$ et celui des lynx $y(0) = 2000$.

CHAPITRE 6

RÉDUCTION DES PROBLÈMES AUX LIMITES À UN PROBLÈME DE CAUCHY

§ 1. Problèmes aux limites

De par la logique de leur fonctionnement les calculateurs analogiques ne sont capables de résoudre que des problèmes de Cauchy. Dans de nombreux problèmes d'ingénieurs les solutions des équations différentielles étudiées doivent satisfaire des conditions aux limites. Prenons pour exemple le problème aux limites de la flexion d'une

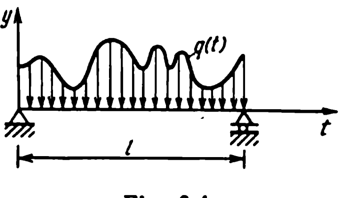


Fig. 6.1

poutre sur deux appuis. La flexion se produit sous l'effet d'une charge répartie de densité $q(t)$ (fig. 6.1). L'équation différentielle de flexion s'écrit :

$$E\mathfrak{J}y''(t)=M(t). \qquad (6.1)$$

La solution doit vérifier les conditions aux limites : $y = 0$ pour $t = 0$ et $y = 0$ pour $t = l$. $E\mathfrak{J}$ est la rigidité de la poutre, l sa longueur, $M(t)$ le moment fléchissant, y la flèche, y' l'angle de rotation de la section de la poutre. Les conditions aux limites traduisent le fait que la flèche aux extrémités appuyées d'une poutre sur deux appuis est nulle.

Réduire ce problème aux limites à un problème de Cauchy revient à trouver un $y'(0) = y'_0$ dépendant de $y(l)$ tel que la solution de l'équation (6.1) se confonde avec celle du problème de Cauchy

$$E\mathfrak{J}y''(t)=M(t), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=y'_0.$$

Pour l'heure il n'existe aucune théorie générale pour la résolution des problèmes aux limites sur calculateur. Dans la suite on exposera

quelques méthodes particulières de réduction approchée et exacte de problèmes aux limites à un problème de Cauchy sous l'hypothèse que les problèmes aux limites en question admettent une solution et une seule.

§ 2. Méthodes des essais

Développons deux méthodes des essais sur l'exemple du problème aux limites $y'' = \Phi[t, y, y']$, $y(0) = y_0$, $y(t^*) = y_*$. On cherchera la solution dans l'intervalle $0 < t < t^*$. La réduction consiste à trouver un y'_0 dépendant de y_* tel que la solution du problème de Cauchy $y'' = \Phi[t, y, y']$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ coïncide avec la solution du problème aux limites initial.

La première *méthode des essais* consiste à résoudre sur machine une série de problèmes auxiliaires de Cauchy $y'' = \Phi[t, y, y']$, $y(0) = y_0$, pour $y'(0) = m_1, m_2, \ldots, m_j, \ldots$, où m_j sont des grandeurs arbitrairement choisies. Chaque solution est délivrée jusqu'à l'instant $t = t^*$ où l'on fixe les valeurs $y(t^*) = y_{m1}, y_{m2}, \ldots$ $\ldots, y_{mj}, \ldots$ Les graphes des courbes intégrales sont représentés sur la figure 6.2. Les valeurs de $y'(0)$ étant arbitraires, aucune courbe intégrale ne passe par le point donné (t^*, y_*). Les résultats fournis par la machine peuvent être exprimés sous une forme fonctionnelle $y(t^*) = F(m)$ à l'aide du tableau

$y'(0)$	m_1	m_2	$\ldots$	m_j	$\ldots$
$y(t^*)$	y_{m1}	y_{m2}	$\ldots$	y_{mj}	$\ldots$

ou encore par le graphe représenté sur la figure 6.3.

Une fois qu'on a défini la dépendance fonctionnelle $y(t^*) = F(m)$, on peut trouver la valeur cherchée de y'_0 correspondant à y_*

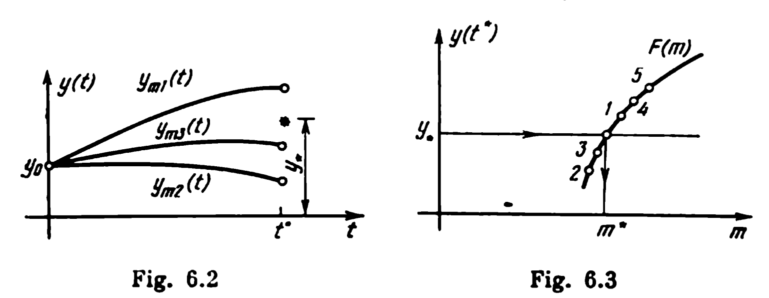


Fig. 6.2 Fig. 6.3

soit par le calcul (moyennant une interpolation), soit graphiquement comme le montre la figure 6.3.

La méthode des essais exposée n'est pas économique car $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_j, \ldots$ sont arbitraires.

La deuxième méthode nommée *méthode des essais et corrections* (ou encore méthode de balayage) est plus rationnelle. Dans cette méthode seuls m_1 et m_2 sont arbitraires, les valeurs suivantes sont choisies en fonction des résultats obtenus.

La méthode de balayage est interprétée graphiquement sur la figure 6.4. Le point *1* a pour coordonnées (m_1, y_{m1}), le point *2* respectivement (m_2, y_{m2}). Ces points sont reliés par une droite qui coupera la droite $y(t^*) = y_*$. L'abscisse du point de concours est la valeur suivante m_3 qui, d'une façon générale, est plus proche de la valeur y_0' cherchée que m_1 et m_2. On résout le problème sur la machine avec m_3 et on définit y_{m3}. On repère ensuite sur le graphe le point 3 de coordonnées (m_3, y_{m3}). On joint le point *3* au point *2* par une droite dont l'intersection avec la droite $y(t^*) = y_*$ donnera la valeur suivante m_4. Les valeurs améliorées $m_3, m_4, \ldots$ ne sont pas forcément à déterminer graphiquement. On remarque sur la figure 6.4 que l'abscisse m_3 de l'intersection des deux droites est égale à

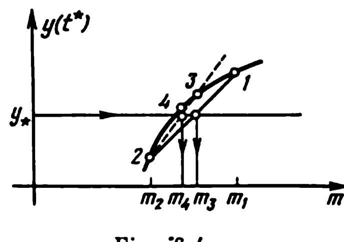


Fig. 6.4

$$m_3 = m_1 + (m_2 - m_1)\frac{y_* - y_{m1}}{y_{m2} - y_{m1}}.$$

Et d'une façon générale

$$m_k = m_{k-2} + (m_{k-1} - m_{k-2})\frac{y_* - y_{m\,k-2}}{y_{m\,k-1} - y_{m\,k-2}}.$$

On alterne résolution sur la machine et précision de la valeur de $y'(0)$ jusqu'à obtenir un y_m peu différent de y_*.

Les deux méthodes peuvent être considérées comme des méthodes de résolution de l'équation $y_* = F(m)$, dont la racine est la valeur y_0' cherchée. Si l'on ne connaît pas l'expression analytique de $F(m)$, on se sert de la machine pour déterminer empiriquement la fonction $y(t^*) = F(m)$.

En principe les méthodes des essais conviennent pour la réduction de tout problème aux limites à un problème de Cauchy. Mais leur efficacité est amoindrie par l'ordre des équations différentielles. Plus l'ordre est élevé, plus il est difficile de trouver les conditions initiales inconnues. Ainsi, en étudiant la flexion d'une poutre posée sur un appui élastique, l'on a à réduire le problème aux limites suivant :

$$EJy^{\mathrm{IV}} + ky = q(t),$$
$$y(0) = y'(0) = y(l) = y''(l) = 0,$$

où $E\mathcal{J}$ est la rigidité de la poutre; k le module de réaction du sol qui caractérise la réaction de l'appui élastique sur la poutre; $q(t)$ la distribution de la densité de charge; l la longueur de la poutre. Les conditions aux limites sont définies par le mode d'encastrement des extrémités de la poutre. Les conditions $y(0) = y'(0) = y(l) = y''(l) = 0$ signifient que l'extrémité gauche est encastrée et l'extrémité droite repose sur un appui. La réduction implique la résolution du système d'équations différentielles par rapport à $y''(0)$ et $y'''(0)$:

$$y''(l) = f_1[y'''(0),\ y''(0)] = 0,$$
$$y(l) = f_2[y'''(0),\ y''(0)] = 0,$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions de deux variables de forme analytique inconnue. L'information sur ces fonctions s'obtient par la méthode des essais à l'aide de la machine.

Il arrive souvent que le système d'équations différentielles servant à définir les conditions initiales manquantes est d'une forme spéciale. En mettant à profit ces particularités on réussit parfois avec assez de facilité à réaliser la réduction. Prenons l'exemple du problème aux limites

$$[E\mathcal{J}(t)\,y'']'' = q(t),$$
$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0.$$

Il décrit la flexion d'une poutre de longueur l sur deux appuis. La poutre est fléchie sous l'action d'une charge continue de densité $q(t)$. La rigidité de la poutre est variable et varie comme l'indique l'expression $E\mathcal{J}(t)$. Pour réduire ce problème, il importe de résoudre par rapport à $y'(0)$ et $y'''(0)$ le système d'équations:

$$y''(l) = f_1[y'''(0)] = 0,$$
$$y(l) = f_2[y'''(0),\ y'(0)] = 0.$$

Ce système est d'une forme spéciale dite triangulaire. En réduisant le problème on aura profit à déterminer d'abord l'inconnue $y'''(0)$ de la première équation; la seconde équation ne contiendra alors que l'inconnue $y'(0)$.

§ 3. Problèmes aux limites linéaires (méthode des combinaisons)

Pour les problèmes aux limites décrits par des équations différentielles linéaires, on dispose d'une méthode qui permet de réduire un problème aux limites d'ordre n à n problèmes auxiliaires de Cauchy. Exposons cette méthode dans le cas d'une équation différentielle du second ordre à coefficients variables

$$y'' + k_1(t)\,y' + k_2(t)\,y = f(t) \tag{6.2}$$

avec les conditions aux limites $y(0) = y_0$, $y(t^*) = y_*$, où 0 et t^* sont les bornes de l'intervalle sur lequel on cherche la solution. Rappelons qu'il nous faut chercher la condition initiale $y'(0) = y'_0$.

L'équation (6.2) étant du second ordre, nous aurons besoin de deux problèmes auxiliaires de Cauchy:

le premier étant $y''_1 + k_1(t)\,y'_1 + k_2(t)\,y_1 = f(t)$,

$y_1(0) = y_0$, $y'_1(0) = (0)$;

le second $y''_2 + k_1(t)\,y'_2 + k_2(t)\,y_2 = 0$,

$y_2(0) = 0$, $y'_2(0) = 1$.

Leurs solutions sont délivrées par la machine jusqu'à l'instant $t = t^*$ où l'on obtient les valeurs $y_1(t^*)$ et $y_2(t^*)$ en fonction desquelles s'exprime l'inconnue y'_0. Trouvons l'expression d'où nous déduirons y'_0. A cet effet formons une combinaison linéaire avec les solutions

$$y(t) = y_1(t) + y'_0 y_2(t), \tag{6.3}$$

où y'_0 est la condition initiale cherchée. La combinaison linéaire (6.3) vérifie l'équation (6.2) avec les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$. Pour que (6.3) vérifie de plus la condition aux limites $y(t^*) = y_*$, il est nécessaire de choisir y'_0 de façon convenable. Pour l'instant $t = t^*$ l'expression (6.3) donne l'équation par rapport à la quantité inconnue y'_0: $y(t^*) = y_1(t^*) + y'_0 y_2(t^*)$, d'où $y'_0 = [y_* - y_1(t^*)]/y_2(t^*)$. Tous les termes du second membre sont connus: y_* par hypothèse, $y_1(t^*)$ et $y_2(t^*)$ par résolution des problèmes auxiliaires correspondants de Cauchy.

Dans les problèmes aux limites linéaires de plus grand ordre, on détermine les conditions initiales manquantes en résolvant sur la machine une série de problèmes auxiliaires de Cauchy, puis un système d'équations algébriques linéaires par rapport aux conditions initiales cherchées. Pour plus de détail on pourra consulter tout manuel traitant des méthodes numériques dans le chapitre concernant la résolution de problèmes aux limites à partir des équations différentielles ordinaires.

Dans certaines équations différentielles linéaires le nombre des problèmes auxiliaires de Cauchy requis par la réduction peut être inférieur à l'ordre de l'équation différentielle donnée. Montrons ceci sur un problème aux limites que l'on rencontre souvent en résistance des matériaux:

$$y''(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y(t^*) = y_*. \tag{6.4}$$

Il s'avère que pour déterminer l'inconnue $y'(0) = y'_0$, il suffit d'un seul problème auxiliaire de Cauchy au lieu de deux, en l'occur-

rence

$$y_1''(t)=f(t), \quad y_1'(0)=0, \quad y_1(0)=y_0. \tag{6.5}$$

En effet, la solution générale de l'équation (6.4) exprimée au moyen de l'inconnue y_0' s'écrit

$$y(t)=y_0't+\int_0^t dt\int_0^t f(t)\,dt+y_0$$

ou encore

$$y(t)=y_0't+y_1(t), \tag{6.6}$$

où $y_1(t)=\int_0^t dt\int_0^t f(t)\,dt+y_0$ est solution du problème auxiliaire de Cauchy. Pour l'instant $t=t^*$, on déduit à partir de (6.6) l'expression de l'inconnue y_0':

$$y_0'=\frac{y_*-y_1(t^*)}{t^*}. \tag{6.7}$$

Considérons maintenant le problème aux limites linéaire d'ordre quatre :

$$y''(t)=f_1(t), \qquad y(0)=y_0, \quad y(t^*)=y_*,$$
$$z''(t)=f_2(t)\,y(t), \quad z(0)=z_0, \quad z(t^*)=z_*.$$

La réduction de ce problème exige en tout deux problèmes auxiliaires de Cauchy. Le premier est le même que (6.5) et l'inconnue y_0' se détermine avec (6.7). Le second est

$$y''(t)=f_1(t), \qquad y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_0',$$
$$z_1''(t)=f_2(t)\,y(t), \quad z_1'(0)=0, \quad z_1(0)=z_0,$$

d'où

$$z_0'=\frac{z_*-z_1(t^*)}{t^*}.$$

§ 4. Questions

1. Pourquoi le calculateur ne délivre-t-il la solution que des équations différentielles données sous la forme d'un problème de Cauchy? (Voir le fonctionnement de l'intégrateur).

2. En quoi consiste le principe de réduction d'un problème aux limites à un problème de Cauchy par la méthode de balayage? Par quoi l'usage de cette méthode est-il restreint?

3. Quelles sont les méthodes connues de réduction d'un problème aux limites à un problème de Cauchy?

CHAPITRE 7

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES SUR MACHINE

§ 1. Equations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre on étudiera une méthode approchée de résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles sur machine sur l'exemple d'équations différentielles linéaires de la forme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=F(x,\ y), \quad (7.1)$$

où A, B, C, a, b, c sont des coefficients donnés, qui peuvent être constants ou dépendre des arguments x et y; $F(x,\ y)$ une fonction donnée des variables x et y. La solution $u(x,\ y)$ de l'équation (7.1) doit vérifier (7.1) dans un domaine dont le bord a pour équation $\Gamma(x,\ y)=0$.

L'équation (7.1) est elliptique, parabolique ou hyperbolique selon que le discriminant $D=AC-B^2$ est positif, nul ou négatif. Elle est mixte si D change de signe dans le domaine donné.

L'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,\ y) \quad (7.2)$$

et son cas particulier l'équation de Laplace $F(x,\ y)=0$ sont des équations de type elliptique. L'équation (7.2) décrit des processus stationnaires relatifs à la flexion d'une lame et d'une membrane, à la torsion d'une tige, à la distribution stationnaire de la température dans les lames, etc.

L'équation de chaleur (de diffusion)

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x,\ t) \quad (7.3)$$

est du type parabolique. Elle décrit la distribution non stationnaire de la température le long d'une tige homogène fine. La solution $u(x,\ t)$ représente la température de la tige à la section de coordonnée x à l'instant t.

L'équation des oscillations libres d'une corde homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (7.4)$$

est du type hyperbolique. La solution $u(x, t)$ de l'équation d'onde (7.4) représente le déplacement transversal de la section d'abscisse x de la corde à l'instant t.

Dans le calcul scientifique, on rencontre souvent des équations différentielles aux dérivées partielles, dont l'ordre est supérieur à deux. Ainsi, la flexion d'une poutre de rigidité variable $E\mathcal{J}(x)$ sous l'action d'une charge continue, dont la densité $q(x, t)$ est fonction du temps, est décrite par l'équation différentielle d'ordre quatre, à coefficients variables,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E\mathcal{J}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t),$$

où x est la coordonnée de la section de la poutre, t le temps, $u(x, t)$ la flèche de la poutre en x à l'instant t, $\psi(x)$ une fonction donnée qui tient compte de la distribution de la masse le long de la poutre.

En résolvant des équations différentielles aux dérivées partielles de la forme (7.1), on rencontre les trois types de problèmes aux limites suivants.

Premier problème aux limites (problème de Dirichlet). La solution $u(x, y)$ de l'équation (7.1) doit être confondue sur le bord du domaine avec une fonction $\varphi(x, y)$ donnée *a priori*, i.e. $u_\Gamma(x, y) = \varphi(x, y)$.

Deuxième problème aux limites (problème de Neumann). La solution $u(x, y)$ de l'équation (7.1) doit être telle que sa dérivée normale $\partial u/\partial n$ coïncide sur le bord du domaine $\Gamma(x, y)$ avec une fonction $\varphi(x, y)$ donnée *a priori*, i.e. $(\partial u/\partial n)_\Gamma = \varphi(x, y)$, et prendre une valeur m donnée *a priori* en un point x^*, y^* connu du domaine, i.e. $u(x^*, y^*) = m$.

Le troisième problème aux limites est du type mixte. Sur le bord du domaine $\Gamma(x, y) = 0$, on donne une combinaison linéaire des valeurs de la fonction $u(x, y)$ et de sa dérivée normale, soit

$$\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Gamma + \beta u_\Gamma(x, y) = \varphi(x, y).$$

Il est essentiel que les solutions de certaines équations différentielles vérifient en plus des conditions aux limites des conditions initiales. Cette terminologie a été adoptée pour les équations différentielles qui décrivent des processus physiques non stationnaires, i.e. qui se déroulent dans le temps et dans l'espace. Les conditions qui se rapportent à l'instant initial sont appelées conditions initiales, celles qui se rapportent aux valeurs fixées des coordonnées spatiales, conditions aux limites. Ainsi, on peut chercher la solution de l'équation de chaleur (7.3), pour une tige de longueur l, qui vérifie la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$ (qui représente la distribution de la température le long de la tige à l'instant $t = 0$)

et les conditions aux limites $u(0, t) = \varphi_1(t)$ (i.e. la température de l'extrémité gauche de la tige varie en fonction du temps comme $\varphi_1(t)$) et $u(l, t) = \varphi_2(t)$ (pour l'extrémité droite de la tige).

Les équations différentielles aux dérivées partielles se résolvent approximativement sur la machine moyennant la réalisation d'un système d'équations différentielles ordinaires les approchant. Le problème le plus facile à résoudre sur la machine est le premier problème aux limites défini sur un domaine rectangulaire.

§ 2. Expression des dérivées au moyen des valeurs de la fonction

L'approximation d'une équation différentielle aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles consiste à remplacer les dérivées partielles par des expressions ne contenant que certaines valeurs de la fonction, appelées formules de dérivation numérique.

La dérivée en un point peut être représentée approximativement de plusieurs façons au moyen des valeurs prises par la fonction pour des valeurs discrètes de l'argument. Les formules de dérivation numérique sont les plus simples à trouver dans le cas où les valeurs de l'argument sont équidistantes.

Voyons tout d'abord comment on obtient l'expression de dérivées d'ordre quelconque au moyen de valeurs de la fonction sur l'exemple de la fonction d'une variable $u(x)$ et ensuite généralisons le procédé à une fonction de plusieurs variables. Soient données pour les valeurs discrètes de l'argument, de pas h.

$$x_{-1} = x_0 - h, \quad x_0, \quad x_1 = x_0 + h,$$

les valeurs correspondantes de la fonction $u(x)$

$$u(x_{-1}), \quad u(x_0), \quad u(x_1).$$

Développons $u(x_{-1})$ et $u(x_1)$ en série de Taylor:

$$u(x_{-1}) = u(x_0 - h) \approx u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2!} u''(x_0) - \frac{h^3}{3!} u'''(x_0) + \ldots, \tag{7.5}$$

$$u(x_1) = u(x_0 + h) \approx u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2!} u''(x_0) + \frac{h^3}{3!} u'''(x_0) + \ldots \tag{7.6}$$

Soustrayons (7.5) de (7.6):

$$u(x_1) - u(x_{-1}) = 2hu'(x_0) + \frac{h^3}{3!} u'''(x_0) + \ldots,$$

au point x_0 la dérivée première sera donc égale à

$$u'(x_0)=\frac{1}{2h}[u(x_1)-u(x_2)]-\frac{h^2}{6}u'''(\varepsilon), \qquad (7.7)$$

où $x_0-h<\varepsilon<x_0+h$. La valeur donnée par cette expression est d'autant plus exacte que le pas h est petit.

Ajoutons (7.5) et (7.6):

$$u(x_{-1})+u(x_1)=2u(x_0)+h^2u''(x_0)+\frac{h^4}{12}u^{IV}(x_0)+\ldots,$$

au point x_0 la dérivée seconde sera donc égale à

$$u''(x_0)=\frac{1}{h^2}[u(x_{-1})-2u(x_0)+u(x_1)]-\frac{h^2}{12}u^{IV}(\varepsilon), \qquad (7.8)$$

où $x_0-h<\varepsilon<x_0+h$.

Les expressions (7.7) et (7.8) permettent de calculer la dérivée à h^2 près. Cependant il est aisé de remarquer que si $u(x)$ est un polynôme du second degré, les formules donnent les valeurs exactes de la dérivée car alors $u'''(x_0)$, $u^{IV}(x_0)$, etc., sont identiquement nulles.

Les dérivées $u'(x_0)$ et $u''(x_0)$ ont été calculées au point central x_0. On les calcule sans peine aux points x_{-1} et x_1. Nous donnerons les formules de dérivation numérique sans les calculs intermédiaires. Dans ces formules on associe aux valeurs

$$x_0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_0+2h,\ \ldots,\ x_j=x_0+jh,\ \ldots$$

de l'argument les valeurs

$$u(x_0)=u_0,\quad u(x_1)=u_1,\quad u(x_2)=u_2,\ \ldots,\quad u(x_j)=u_j,\ \ldots,$$
$$u'(x_0)=u'_0,\quad u'(x_1)=u'_1,\quad u'(x_2)=u'_2,\ \ldots,\quad u'(x_j)=u'_j,\ \ldots$$

de la fonction et de la dérivée.

Les formules de dérivation diffèrent, selon la précision demandée, par le nombre de valeurs de la fonction $u(x)$ utilisées pour le calcul de la dérivée $u'(x)$ en un point x_j.

Trois valeurs de la fonction

$$\begin{aligned} u'_0&=\frac{1}{2h}[-3u_0+4u_1-u_2]+\frac{h^2}{3}u'''(\varepsilon_0),\\ u'_1&=\frac{1}{2h}[-u_0+u_2]-\frac{h^2}{6}u'''(\varepsilon_1),\\ u'_2&=\frac{1}{2h}[u_0-4u_1+3u_2]+\frac{h^2}{3}u'''(\varepsilon_2), \end{aligned} \qquad (7.9)$$

où $x_0<\varepsilon_0<x_2$; $x_0<\varepsilon_1<x_2$; $x_0<\varepsilon_2<x_2$.

Quatre valeurs de la fonction

$$
\begin{aligned}
u_0' &= \frac{1}{6h}[-11u_0 + 18u_1 - 9u_2 + 2u_3] - \frac{h^3}{4}u^{\mathrm{IV}}(\varepsilon_0),\\
u_1' &= \frac{1}{6h}[-2u_0 - 3u_1 + 6u_2 - u_3] + \frac{h^3}{12}u^{\mathrm{IV}}(\varepsilon_1),\\
u_2' &= \frac{1}{6h}[u_0 - 6u_1 + 3u_2 + 2u_3] - \frac{h^3}{12}u^{\mathrm{IV}}(\varepsilon_2),\\
u_3' &= \frac{1}{6h}[-2u_0 + 9u_1 - 18u_2 + 11u_3] + \frac{h^3}{4}u^{\mathrm{IV}}(\varepsilon_3),
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

où $x_0 < \varepsilon_0 < x_3$; $x_0 < \varepsilon_1 < x_3$; $x_0 < \varepsilon_2 < x_3$; $x_0 < \varepsilon_3 < x_3$.

Cinq valeurs de la fonction

$$
\begin{aligned}
u_0' &= \frac{1}{12h}[-25u_0 + 48u_1 - 36u_2 + 16u_3 - 3u_4] + \frac{h^4}{5}u^{\mathrm{V}}(\varepsilon_0),\\
u_1' &= \frac{1}{12h}[-3u_0 - 10u_1 + 18u_2 - 6u_3 + u_4] - \frac{h^4}{20}u^{\mathrm{V}}(\varepsilon_1),\\
u_2' &= \frac{1}{12h}[u_0 - 8u_1 + 8u_3 - u_4] + \frac{h^4}{30}u^{\mathrm{V}}(\varepsilon_2),\\
u_3' &= \frac{1}{12h}[-u_0 + 6u_1 - 18u_2 + 10u_3 + 3u_4] - \frac{h^4}{20}u^{\mathrm{V}}(\varepsilon_3),\\
u_4' &= \frac{1}{12h}[3u_0 - 16u_1 + 36u_2 - 48u_3 + 25u_4] + \frac{h^4}{5}u^{\mathrm{V}}(\varepsilon_4),
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

où $x_0 < \varepsilon_0 < x_4$; $x_0 < \varepsilon_1 < x_4$; $x_0 < \varepsilon_2 < x_4$; $x_0 < \varepsilon_3 < x_4$; $x_0 < \varepsilon_4 < x_4$, et ainsi de suite.

On remarquera que les dérivées peuvent être écrites sous la forme matricielle.

$$
\boldsymbol{u}' \approx \frac{1}{h}\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}, \tag{7.12}
$$

où $\boldsymbol{u}'$ et $\boldsymbol{u}$ sont des vecteurs de dimension n, $\boldsymbol{M}$ une (n, n)-matrice, n le nombre de valeurs de la fonction $u(x)$. Pour les expressions (7.9), on a $\boldsymbol{u}' = (u_0', u_1', u_2')$, $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, u_2)$ et

$$
\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -1{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & +0{,}5 \\ 0{,}5 & -2 & 1{,}5 \end{bmatrix}.
$$

L'égalité matricielle (7.12) nous suggère un procédé de recherche des dérivées d'ordre supérieur.

En effet,

$$
\boldsymbol{u}'' \approx \frac{1}{h}\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}' = \frac{1}{h^2}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{u}.
$$

Et d'une façon générale

$$u^{(k)} \approx \frac{1}{h^k} M^k u \tag{7.13}$$

avec bien entendu $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Ce qui est important c'est que les valeurs des dérivées sont exactes pour les polynômes $u(x)$ de degré non supérieur à $n-1$.

Le calcul des dérivées partielles est le même que celui des dérivées d'une fonction d'une seule variable. Ainsi, en vertu de (7.12), les valeurs de la dérivée partielle $u'_y(x, y)$ aux points

$$x,\ y_0;\ x,\ y_1;\ \ldots;\ x,\ y_i;\ \ldots;\ x,\ y_{n-1}$$

seront données par l'expression

$$u'_y(x, y) \approx \frac{1}{h_y} M u(x, y),$$

où $u'_y(x, y) = [u'_y(x, y_0), u'_y(x, y_1), \ldots, u'_y(x, y_{n-1})]$ est le vecteur de dimension n des valeurs des dérivées; $u(x, y) = [u(x, y_0), u(x, y_1), \ldots, u(x, y_{n-1})]$ le vecteur de dimension n des valeurs de la fonction, M une (n, n)-matrice; h_y le pas.

Si l'on a besoin de la dérivée seconde par rapport à y, on se sert de l'égalité

$$u''_y \approx \frac{1}{h_y^2} M^2 u(x, y),$$

où $u''_y(x, y) = [u''_y(x, y_0), u''_y(x, y_1), \ldots, u''_y(x, y_{n-1})]$. Et d'une façon générale la dérivée partielle d'ordre k par rapport à y a pour expression, en vertu de (7.13),

$$u_y^{(k)} \approx \frac{1}{h_y^k} M^k u(x, y).$$

Souvent il est utile de connaître les expressions des dérivées au moyen des valeurs de la fonction aux nœuds d'un réseau rectangulaire de dimension $n \times m$:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h_x,\ x_2 = x_0 + 2h_x,\ \ldots,\ x_{n-1} = x_0 + (n-1)\,h_x,$$
$$y_0,\ y_1 = y_0 + h_y,\ y_2 = y_0 + 2h_y,\ \ldots,\ y_{m-1} = y_0 + (m-1)\,h_y.$$

Il est aisé de voir que les expressions qui nous intéressent peuvent être écrites sous forme de l'égalité matricielle

$$[u'_x(x, y)] = \frac{1}{h_x} M [u(x, y)], \tag{7.14}$$

où

$$[u'_x(x, y)] = \begin{bmatrix} u'_x(x_0, y_0) & u'_x(x_0, y_1) & \dots & u'_x(x_0, y_{m-1}) \\ u'_x(x_1, y_0) & u'_x(x_1, y_1) & \dots & u'_x(x_1, y_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u'_x(x_{n-1}, y_0) & u'_x(x_{n-1}, y_1) & \dots & u'_x(x_{n-1}, y_{m-1}) \end{bmatrix},$$

$$[u(x, y)] = \begin{bmatrix} u(x_0, y_0) & u(x_0, y_1) & \dots & u(x_0, x_{m-1}) \\ u(x_1, y_0) & u(x_1, y_1) & \dots & u(x_1, y_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(x_{n-1}, y_0) & u(x_{n-1}, y_1) & \dots & u(x_{n-1}, y_{m-1}) \end{bmatrix}.$$

Passons maintenant aux formules de dérivation pour dérivées mixtes. Dans les cas simples où l'on utilise un petit nombre de valeurs de la fonction, les dérivées mixtes peuvent être calculées en portant directement les formules (7.9), (7.10), (7.11) l'une dans l'autre. Illustrons cela sur l'exemple de la dérivée $u''_{yx}(x_1, y_1)$ en supposant que les valeurs de la fonction sont données aux nœuds d'un réseau carré de dimension 3×3. En vertu de (7.7) on aura

$$u''_{yx} \approx \frac{1}{2h_x} [u'_x(x_1, y_2) - u'_x(x_1, y_0)] \approx$$
$$\approx \frac{1}{4h_y h_x} [u(x_2, y_2) - u(x_0, y_2) - u(x_2, y_0) + u(x_0, y_0)].$$

Il est possible d'obtenir des formules de dérivation plus générales, en un nœud arbitraire, sous forme matricielle

$$[u''_{yx}(x, y)] = \frac{1}{h_y h_x} M [u(x, y)]^t M^t, \tag{7.15}$$

où l'indice « t » indique la transposition

$$[u''_{yx}(x, y)] = \begin{bmatrix} u''_{yx}(x_0, y_0) & u''_{yx}(x_1, y_0) & \dots & u''_{yx}(x_{n-1}, y_0) \\ u''_{yx}(x_0, y_1) & u''_{yx}(x_1, y_1) & \dots & u''_{yx}(x_{n-1}, y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u''_{yx}(x_0, y_{n-1}) & u''_{yx}(x_1, y_{n-1}) & \dots & u''_{yx}(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$[u(x, y)] = \begin{bmatrix} u(x_0, y_0) & u(x_0, y_1) & \dots & u(x_0, y_{n-1}) \\ u(x_1, y_0) & u(x_1, y_1) & \dots & u(x_1, y_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(x_{n-1}, y_0) & u(x_{n-1}, y_1) & \dots & u(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Les formules (7.14) et (7.15) se généralisent aisément au cas de dérivées d'ordre supérieur.

§ 3. Approximation d'une équation aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles ordinaires

La méthode qui consiste à remplacer approximativement une équation différentielle aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles ordinaires s'appelle *méthode des droites*. Exposons-la sur l'exemple de l'équation de Poisson.

Soit à résoudre sur machine l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{7.16}$$

par réduction à un système d'équations différentielles ordinaires. On cherchera la solution $u(x, y)$ de l'équation de Poisson sur un

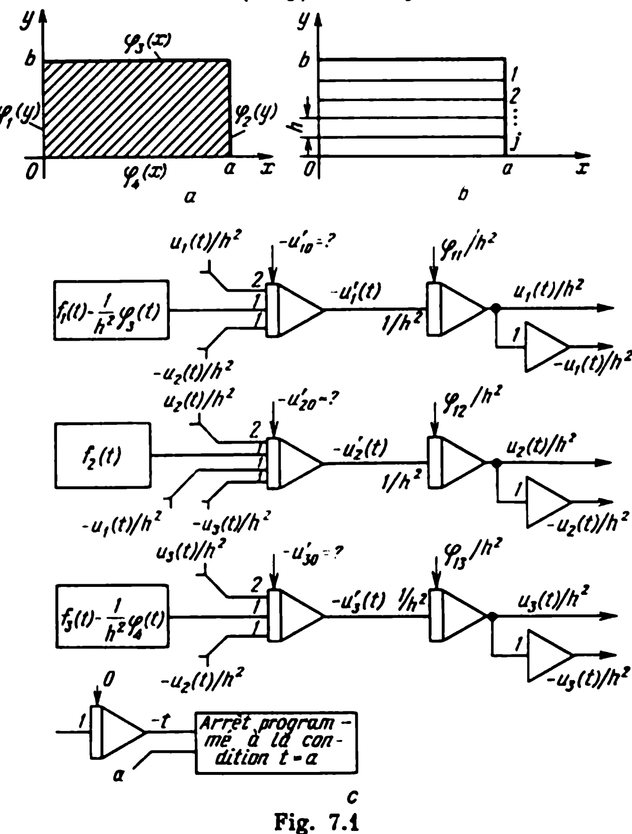


Fig. 7.1

domaine rectangulaire $0 < x < a$, $0 < y < b$ (fig. 7.1, *a*) au bord duquel $u(x, y)$ doit vérifier les conditions aux limites $u(0, y) = \varphi_1(y)$, $u(a, y) = \varphi_2(y)$, $u(x, 0) = \varphi_4(x)$, $u(x, b) = \varphi_3(x)$.

En vertu de la méthode des droites il faut tracer dans le domaine des droites horizontales à une distance h l'une de l'autre (fig. 7.1, *b*). Supposons qu'on ait mené n droites parallèles. La solution de l'équation initiale (7.16) étant valable pour tout point du domaine, elle le sera *a fortiori* pour toute droite tracée.

Désignons par y_j l'ordonnée de la j-ème droite. Il est évident que l'on aura

$$\frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial x^2} = \frac{d^2 u_j(x)}{dx^2}, \quad \text{où} \quad u_j(x) = u(x, y_j);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u_{j-1}x - 2u_j(x) + u_{j+1}(x)],$$

où $\quad u_{j-1}(x) = u(x, y_{j-1}), \ u_{j+1}(x) = u(x, y_{j+1}); \ f(x, y_j) = f_j(x).$

En portant les expressions correspondantes dans l'équation (7.16), on obtient un problème aux limites pour le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d^2 u_j(x)}{dx^2} + \frac{1}{h^2}[u_{j-1}(x) - 2u_j(x) + u_{j+1}(x)] = f_j(x);$$

$$u_j(0) = \varphi_1(y_j) = \varphi_{1j}; \quad u_j(a) = \varphi_2(y_j) = \varphi_{2j}, \tag{7.17}$$

où $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ et $u_0(x) = \varphi_3(x)$, $u_{n+1}(x) = \varphi_4(x)$. La solution de ce système est constituée de n fonctions $u_j(x)$ d'une variable.

Construisons le schéma fonctionnel qui délivre la solution du système (7.17) pour $n = 3$, i.e. traçons trois parallèles dans le domaine qui nous intéresse. Dans la machine, le rôle de la variable indépendante x est tenu par le temps t. En vertu de (7.17), le système d'équations différentielles s'écrit :

$$u_1''(t) = f_1(t) + \frac{1}{h^2}[-\varphi_3(t) + 2u_1(t) - u_2(t)];$$

$$u_2''(t) = f_2(t) + \frac{1}{h^2}[-u_1(t) + 2u_2(t) - u_3(t)];$$

$$u_3''(t) = f_3(t) + \frac{1}{h^2}[-u_2(t) + 2u_3(t) - \varphi_4(t)],$$

avec les conditions aux limites

$$u_1(0) = \varphi_{11}, \quad u_2(0) = \varphi_{12}, \quad u_3(0) = \varphi_{13},$$

$$u_1(a) = \varphi_{21}, \quad u_2(a) = \varphi_{22}, \quad u_3(a) = \varphi_{23}.$$

Avant de résoudre ce système, il faut réduire les conditions aux limites $u_1(a)$, $u_2(a)$, $u_3(a)$ aux conditions initiales inconnues $u_1'(0)$, $u_2'(0)$, $u_3'(0)$.

Le schéma fonctionnel correspondant est représenté sur la figure 7.1, *c*. Il est constitué de trois chaînes identiques d'intégrateurs, reliées par des liaisons dont les entrées et sorties sont indiquées. Le schéma prévoit une interruption de la résolution à la condition $t = a$.

§ 4. Exemple de programmation des calculateurs analogiques pour l'étude de la distribution non stationnaire de la température

1. Position du problème. Une forte cloison homogène d'épaisseur l, de grande superficie, sépare deux milieux de températures différentes (fig. 7.2): celle du milieu de gauche varie comme $\varphi_1(t)$, celle du milieu de droite comme $\varphi_2(t)$. On demande d'étudier sur machine la distribution de la température pour les points intérieurs de la cloison, les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ étant supposées données.

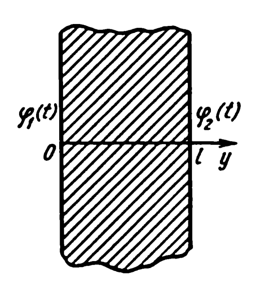


Fig. 7.2

Introduisons tout d'abord des variables mathématiques qui nous serviront à décrire la distribution de la température dans la cloison. Traçons pour cela une perpendiculaire à la cloison, qui figurera l'axe y. La température des points intérieurs de la cloison est une fonction du temps t et de la coordonnée y, i.e. $v(y, t)$. Les points de la cloison situés sur une même verticale possèdent la même température (sont isothermes) en vertu de la grande superficie et de l'homogénéité de la cloison.

La fonction $v(t, y)$ vérifie l'équation de chaleur

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{7.18}$$

où λ est le coefficient de conductibilité thermique, c la capacité thermique volumique spécifique de la cloison. La solution de l'équation (7.18) doit vérifier les conditions aux limites $v(0, t) = \varphi_1(t)$, $v(l, t) = \varphi_2(t)$ et la condition initiale $v(y, 0) = T(y)$.

$T(y)$ est une fonction donnée caractérisant la distribution de la température dans la cloison à l'instant initial.

2. Approximation de l'équation de la chaleur par un système d'équations différentielles ordinaires. Pour trouver un système d'équations différentielles ordinaires approchant l'équation (7.18), il faut partager la cloison en couches d'égale épaisseur par des verticales. Aux points d'intersection des verticales avec l'axe y, la température sera fonction d'une seule variable, le temps. On supposera que ces

points sont distants l'un de l'autre de h (fig. 7.3). Portons la coordonnée y_j d'un point j dans l'équation (7.18):

$$\frac{\partial v(y_j, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 v(y_j, t)}{\partial y^2} \tag{7.19}$$

Si l'on désigne $v(v_j, t)$ par $v_j(t)$, alors $\frac{\partial v(y_j, t)}{\partial t} = \frac{dv_j(t)}{dt}$. La dérivée partielle $\frac{\partial^2 v(y_j, t)}{\partial y^2}$ peut être exprimée approximative-

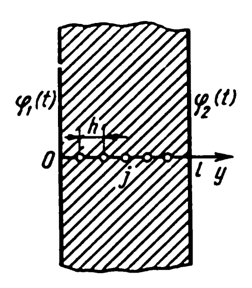


Fig. 7.3

ment au moyen des valeurs de la fonction $v(y, t)$ au point y_j et aux points voisins $j+1$ et $j-1$ par la formule

$$\frac{\partial^2 v(y_j, t)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)],$$

où

$$v_{j+1}(t) = v(y_{j+1}, t); \quad v_{j-1}(t) = v(y_{j-1}, t).$$

En tenant compte de ces expressions on peut mettre (7.19) sous forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre:

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \mu[v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)],$$

$$v_j(0) = T(y_j) = T_j; \quad \mu = \frac{\lambda}{ch^2}.$$

Le nombre de ces équations est égal au nombre de points d'intersection. Si l'on a au total n points, on obtient un système de n équations différentielles ordinaires qui approchera l'équation (7.19):

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \mu[v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)], \tag{7.20}$$

$$v_j(0) = T_j; \quad v_0(t) = \varphi_1(t); \quad v_{n+1}(t) = \varphi_2(t); \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

On reconnaît dans le système (7.20) un problème de Cauchy.

3. Schéma fonctionnel. Le schéma fonctionnel qui réalise le système d'équations différentielles (7.20) est représenté sur la figure 7.4.

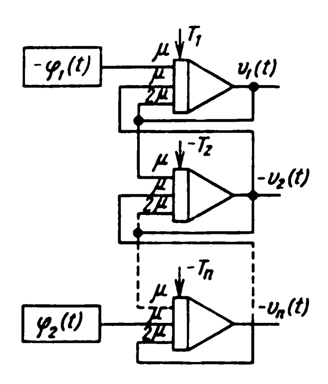


Fig. 7.4

C'est un schéma économique qui n'exige qu'un intégrateur pour résoudre chaque équation du système. Les rectangles figurent les générateurs des fonctions données $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

4. Choix des échelles. En procédant au choix des échelles des variables on aura à l'esprit que la température des points intérieurs de la cloison n'est pas supérieure aux valeurs de $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$.

§ 5. Interpolation en cours de résolution des équations aux dérivées partielles

La machine délivre la solution $u(x, t)$ d'une équation différentielle aux dérivées partielles seulement pour certaines valeurs fixes de l'argument

$$x_0, \; x_1 = x_0 + h, \; \ldots, \; x_j = x_0 + jh, \; \ldots, \; x_n = x_0 + nh,$$

sous forme d'une collection de fonctions

$$u(x_0, t), \; u(x_1, t), \; \ldots, \; u(x_j, t), \; \ldots, \; u(x_n, t). \quad (7.21)$$

On a souvent besoin de calculer à partir de (7.21) la valeur de la solution $u(x, t)$ pour un $x = x^*$ arbitraire compris dans l'intervalle $[x_0, x_n]$. La fonction $u(x^*, t)$ peut être trouvée par interpolation. Il faudra construire à cet effet un schéma interpolateur qui

réalisera une interpolation quelconque, par exemple la formule d'interpolation de Lagrange

$$L(x^*,\ t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-{}^*x_0)(x^*-x_1)\ldots(x^*-x_{j-1})(x^*-x_{j+1})\ldots(x^*-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}\times$$
$$\times u(x_j,\ t). \qquad (7.22)$$

La formule de Lagrange est un polynôme de degré n, qui prend les mêmes valeurs que la fonction $u(x,\ t)$ aux points $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$. Cette coïncidence fait supposer que les valeurs du polynôme d'interpolation (7.22) seront très voisines de celles de la fonction $u(x,\ t)$ pour les autres valeurs de l'argument. La conséquence immédiate de cette coïncidence est qu'au lieu de la valeur inconnue de la fonction $u(x^*,\ t)$ on peut se servir de la valeur prise par le polynôme d'interpolation en x^*. Les méthodes de déduction et d'étude des diverses formules d'interpolation font l'objet d'une discipline spéciale appelée *théorie d'interpolation et d'approximation des fonctions.* Nous avons préféré la formule d'interpolation de Lagrange à toute autre, car sa forme permet de construire le plus facilement le schéma fonctionnel de l'interpolateur. En effet, la formule de Lagrange peut être mise sous forme d'une somme de produits

$$L(x^*,\ t)=\sum_{j=0}^{n}a_j(x^*)\,u(x_j,\ t), \qquad (7.23)$$

où $a_j(x^*)$ est un coefficient constant égal à

$$a_j(x^*)=\frac{(x^*-x_0)(x^*-x_1)\ldots(x^*-x_{j-1})(x^*-x_{j+1})\ldots(x^*-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}. \qquad (7.24)$$

L'écriture de la formule d'interpolation sous forme d'une somme de produits nous suggère immédiatement d'utiliser en qualité d'interpolateur un sommateur ordinaire à $n+1$ entrées. La variable d'entrée du sommateur appliquée à la j-ème entrée sera la fonction connue $u(x_j,\ t)$, quant au coefficient de transfert du sommateur par la j-ème entrée, il dépendra de la valeur donnée $x=x^*$ et peut être calculé avec la formule (7.24).

En plus du sommateur on peut avoir besoin d'inverseurs, car les coefficients $a_j(x^*)$ n'auront pas forcément le même signe.

La lourdeur de l'expression (7.24) donne l'impression que la détermination des coefficients $a_j(x^*)$ sera assez laborieuse. Mais ce n'est qu'une impression. En effet, le polynôme d'interpolation est construit non pas sur $n+1$ valeurs de la fonction $u(x,\ t)$, mais sur trois ou quatre points proches de x^*. A signaler que le polynôme d'interpolation est du second degré si l'interpolation est réalisée sur trois valeurs de la fonction $u(x,\ t)$.

§ 6. Exercices

1. Mettre les formules (7.10) sous forme matricielle. Montrer que la puissance quatrième de cette matrice est la matrice zéro. Expliquez, pourquoi.

2. Trouver l'expression générale de la matrice des valeurs de la dérivée mixte $u_{yx}^{lk}(x_j, y_i)$ en fonction des valeurs prises par la fonction aux nœuds du réseau rectangulaire

$$x_0, x_0 + h_x, x_0 + 2h_x, \ldots, x_0 + jh_x, \ldots, x_0 + (n-1)h_x,$$
$$y_0, y_0 + h_y, y_0 + 2h_y, \ldots, y_0 + ih_y, \ldots, y_0 + (m-1)h_y,$$

où l et k sont des entiers positifs désignant l'ordre des dérivées respectivement par rapport aux variables y et x, avec $1 \leqslant l \leqslant m-1$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

3. Dans la programmation des calculateurs analogiques, pour résoudre des équations différentielles aux dérivées partielles il faut souvent chercher les formules de dérivation sous la forme

$$v(x) = \frac{d^l}{dx^l} \varphi(x) \frac{d^k u(x)}{dx^k},$$

où l et k sont des entiers positifs.

Montrer qu'aux nœuds

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_{n-1} = x_0 + (n-1)h$$

on a

$$\boldsymbol{v}(x) \approx \frac{1}{h^{l+k}} M^l [\varphi(x)] M^k \boldsymbol{u}(x),$$

où

$$\boldsymbol{v}(x) = [v(x_0), v(x_1), \ldots, v(x_{n-1})],$$
$$\boldsymbol{u}(x) = [u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_{n-1})],$$
$$[\varphi(x)] = \begin{bmatrix} \varphi(x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi(x_1) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi(x_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

4. Dans les exercices suivants, établir les schémas fonctionnels qui délivrent approximativement les solutions des équations différentielles aux dérivées partielles sous forme de solution d'un système d'équations différentielles ordinaires.

1) Une corde de longueur unité, fixée à ses extrémités, vibre sous l'action d'une force extérieure dans un milieu plan, dont la résistance est proportionnelle à la vitesse des vibrations de la corde. Les vibra-

tions obéissent à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F(x, t),$$

avec les conditions initiales $u(x, 0) = \exp(-x)$; $u'_t(x, 0) = 1 - x$; $0 < x < 1$ et les conditions aux limites $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $0 < t < \infty$. La fonction $u(x, t)$ représente l'écart par rapport à la position d'équilibre de la section d'abscisse x à l'instant t; $F(x, t) = x \sin \omega t$ est la force extérieure appliquée à la corde; α, β, ω des constantes positives.

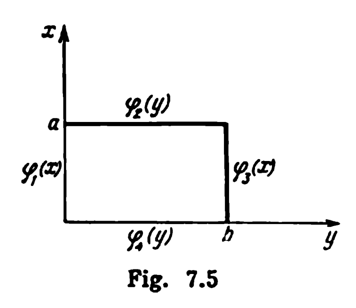


Fig. 7.5

2) La température des extrémités d'une tige homogène fine de longueur unité varie comme $u(0, t) = \sin \omega t$, $u(1, t) = \cos t$. La surface latérale de la tige est isolée thermiquement. La température initiale de la tige est $u(x, 0) = \sin \pi x$. Aux points intérieurs de la tige, la température est décrite par la fonction $u(x, t)$ qui vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

où a et ω sont des constantes positives.

3) La tige de l'exercice 2) est placée dans un milieu entre lequel et la surface latérale de la tige il s'établit un échange thermique convectif. La température u_m du milieu est une fonction donnée $u_m(x, t) = x \exp(-t)$ de la coordonnée x et du temps t, vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \beta [u(x, t) - u_m(x, t)], \quad 0 < x < 1, \; 0 < t < \infty,$$

où β est une constante positive.

4) On considère une lame rectangulaire calorifuge (fig. 7.5) aux bords de laquelle la température est donnée par les fonctions

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right);$$
$$\varphi_2(y) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b} y;$$
$$\varphi_3(x) = 0;$$
$$\varphi_4(y) = \sin \frac{\pi}{b} y.$$

La distribution stationnaire de la température $u(x, y)$ aux points intérieurs de la lame obéit à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

CHAPITRE 8

GÉNÉRATION ET ÉTUDE SUR MACHINE DE FONCTIONS DONNÉES D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE

§ 1. Problèmes relatifs à la génération des fonctions

On a à générer des fonctions données de la variable indépendante lorsqu'on résout :

1. Des équations différentielles dont le second membre est la fonction donnée.
2. Des équations différentielles non linéaires qui impliquent la génération d'une fonction dépendant de la solution.
3. Des équations différentielles à coefficients variables où la fonction donnée est un coefficient variable.
4. Et enfin lorsqu'on étudie une fonction sur la machine pour en définir par exemple les zéros, les extrémums, les points singuliers, etc.

Les méthodes de génération d'une fonction sur machine sont définies par la donnée et les propriétés de cette fonction. La fonction la plus simple à réaliser est la constante. Il lui correspond une tension constante. La génération des autres types de fonctions est ramenée à la résolution sur machine d'une équation différentielle spécialement choisie.

Cependant cette méthode n'est intrinsèquement valable que pour certaines fonctions multidifférentiables données analytiquement. Si la fonction est obtenue empiriquement, est discontinue ou différentiable par morceaux, il faut recourir à d'autres méthodes.

La fonction générée peut être étudiée à l'aide de la machine. Les opérateurs de la machine qui réalisent des opérations logiques permettent d'interrompre automatiquement la génération de la fonction lorsque sont réalisées des conditions logiques formulées *a priori*. Ainsi on peut stopper la machine à l'instant où la fonction s'annule, atteint son extrémum ou passe par un point singulier.

§ 2. Génération de fonctions multidifférentiables données analytiquement

1. La fonction est donnée par une expression analytique simple. Supposons que la fonction est donnée sous la forme analytique $f(t)$ et qu'elle est multidifférentiable par rapport à la variable t. On dérive

la fonction $f(t)$ successivement et on cherche à établir avec les dérivées d'ordre supérieur une équation différentielle qui admette la fonction $f(t)$ pour solution. Cette équation s'appelle *équation différentielle déterminante* de la fonction $f(t)$. Une fonction $f(t)$ peut avoir plusieurs équations déterminantes. On cherchera donc la plus « simple », i.e. celle qui met le moins d'opérateurs en jeu. Voyons quelques exemples.

EXEMPLE 1. *Générer la fonction* $y(t) = a \exp(-\alpha t)$.

Cherchons l'équation déterminante. Dérivons à cet effet la fonction initiale; on a

$$y'(t) = -\alpha\, a \exp(-\alpha t).$$

En comparant la fonction initiale avec sa dérivée on remarque que $y'(t) = -\alpha y(t)$. C'est l'équation différentielle déterminante de la fonction initiale. Cherchons maintenant la condition initiale. Elle vaut $y(0) = a$.

Construisons maintenant le schéma fonctionnel qui génère la solution de l'équation déterminante. Le schéma fonctionnel est

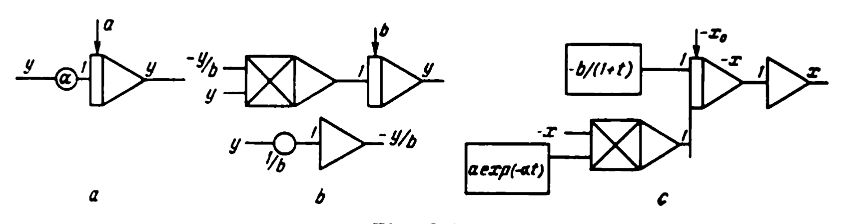


Fig. 8.1

représenté sur la figure 8.1, *a*. C'est un schéma très simple qui ne met en jeu qu'un seul intégrateur. On constate donc que la fonction $a \exp(-\alpha t)$ est facile à réaliser sur machine.

EXEMPLE 2. *Générer la fonction* $y(t) = b/(1 + t)$.

Cherchons l'équation déterminante. Dérivons la fonction initiale; on a

$$y'(t) = -b/(1 + t)^2.$$

En comparant la fonction initiale à sa dérivée on constate que

$$y'(t) = -\frac{y^2(t)}{b}, \quad y(0) = b.$$

Le schéma fonctionnel correspondant à cette équation est représenté sur la figure 8.1, *b*. Remarquons au passage qu'en plus de la fonction $b/(1 + t)$ on obtient à la sortie du multiplieur la fonction $b/(1 + t)^2$.

EXEMPLE 3. Résoudre l'*équation différentielle*

$$\dot{x}-\frac{b}{1+t}x+a\exp(-\alpha t)=0.$$

C'est une équation différentielle non homogène du premier ordre à coefficients variables. Son schéma qui est représenté sur la figure 8.1, *c* ne présente aucune difficulté, puisque l'on sait construire ceux des fonctions $b/(1+t)$ et $a\exp(-\alpha t)$.

Dans les exemples traités, on n'a pratiquement éprouvé aucune peine à trouver les équations déterminantes. Mais, en réalité, la dépendance fonctionnelle $F(t)$ qu'il faut réaliser est souvent d'une forme qui complique la recherche de l'équation déterminante. Lorsque l'on compare l'expression analytique de la fonction initiale avec ses dérivées, il n'est pas toujours simple de dégager une relation qui permette de former l'équation différentielle déterminante. Dans ces cas il y a intérêt à mettre la fonction initiale sous la forme

$$F(t)=f_1(t)+f_2(t)+\ldots+f_n(t)$$

ou

$$F(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)\ldots f_n(t),$$

ou sous une combinaison de sommes et de produits de fonctions. L'usage de cette méthode ne se justifie que lorsque chaque fonction $f_j(t)$ possède une équation déterminante facilement réalisable sur machine. Si donc l'on a à réaliser la fonction

$$F(t)=\frac{a\exp(-\alpha t)}{1+t},$$

on n'a guère intérêt à chercher l'équation déterminante pour la fonction $F(t)$, il est plus simple de mettre $F(t)$ sous la forme du produit

$$F(t)=[\alpha\exp(-\alpha t)]\cdot\frac{1}{1+t},$$

et de chercher l'équation déterminante de chaque facteur.

Pour la génération de certaines fonctions

$$y(t)=f(t) \tag{8.1}$$

il y a parfois lieu de procéder à une transformation qui facilite la recherche de l'équation déterminante de $y(t)$. Cette transformation consiste à trouver une fonction F de $y(t)$ et de $f(t)$, i.e.

$$F[y(t)]=F[f(t)]. \tag{8.2}$$

Si la fonction F est dûment choisie, souvent la dérivation successive de (8.2) conduit rapidement à l'équation déterminante. Pour

fonction auxiliaire F on peut prendre soit la fonction inverse de $f(t)$, soit le logarithme de $f(t)$, soit une autre fonction.

EXEMPLE 4. *Trouver l'équation différentielle déterminante de la fonction*

$$y(t) = (1 + t)^{-0,27}.$$

Pour fonction auxiliaire on peut prendre ici le logarithme

$$\mathrm{Log}\, y(t) = -0,27\, \mathrm{Log}\,(1 + t).$$

La dérivation de cette égalité par rapport à t donne

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{0,27}{1+t}.$$

Toutes transformations faites, on obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y'(t) = -t \cdot y'(t) - 0,27y(t)$, $y(0) = 1$. On remarquera que la génération du polynôme du cinquième degré $y(t) = (1 + t)^5$ par la méthode indiquée exige également la réalisation de l'équation différentielle du premier ordre $y'(t) = -ty'(t) + 5y(t)$. La méthode traditionnelle conduit après une quintuple dérivation de la fonction $(1 + t)^5$ à l'équation différentielle d'ordre cinq $y^{V}(t) = 120$. Voyons un autre exemple.

EXEMPLE 5. *Trouver l'équation différentielle déterminante de la fonction* $y(t) = t^{1/3}$.

Pour fonction auxiliaire F on a intérêt à prendre ici l'inverse de la fonction $t^{1/3}$. En d'autres termes, élevons au cube les deux membres de la fonction initiale ; on a $y^3(t) = t$. La dérivation de la dernière égalité par rapport à t nous conduit à l'équation différentielle $y'(t)\, y^2(t) - 1/3 = 0$, $y(0) = 0$.

On trouvera plus bas le tableau des équations différentielles déterminantes pour quelques fonctions élémentaires.

2. La fonction est donnée analytiquement sous forme de fonction composée. On rencontre souvent des fonctions de fonctions ou fonctions composées. Par exemple, la fonction $F(t) = f_2[f_1(t)]$ est une composée de deux fonctions, $F(t) = f_3[f_2[f_1(t)]]$ une composée de trois fonctions. Les fonctions composées peuvent être réalisées sur machine d'autant plus facilement que le sont les équations déterminantes de chaque fonction f_1, f_2, f_3, etc.

Illustrons sur des exemples la technique de recherche des équations différentielles déterminantes pour fonctions composées.

Tableau 8.1

Tableau des équations différentielles déterminantes

Fonction $x(t)$	Equation différentielle déterminante	Domaine de définition
t^{α}	$tx' - \alpha x = 0$	$t \geqslant 0$
$\exp t$	$x' - x = 0$	$-\infty < t < \infty$
a^t	$x' - x \operatorname{Log} a = 0$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{Log} t$	$x' - \exp(-x) = 0,\ tx' - 1 = 0$	$t > 0$
$\sin t,\ \cos t$	$x'' + x = 0$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{tg} t$	$x' = 1 + x^2,\ x'' = 2xx'$	$t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
		$n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$
$\operatorname{arc\,tg} t$	$x' = \cos^2 x,\ x'' = -t^2 x'' - 2tx'$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{cotg} t$	$x' = -1 - x^2,\ x'' = -2xx'$	$t \neq \pi n$
		$n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$
$\operatorname{arc\,cotg} t$	$x' = -\sin^2 x,\ x'' = t^2 x'' + tx'$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{arc\,sin} t$	$x' \cos x - 1 = 0$	$\lvert t \rvert < 1$
$\operatorname{arc\,cos} t$	$x' \sin x + 1 = 0$	$\lvert t \rvert < 1$
$\operatorname{sh} t,\ \operatorname{ch} t$	$x'' - x = 0$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{th} t$	$x' = 1 - x^2,\ x'' = -2xx'$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{cth} t$	$x' = 1 - x^2,\ x'' = -2xx'$	$t \neq 0$
$\operatorname{Arsh} t$	$x' \operatorname{ch} x - 1 = 0$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{Arch} t$	$x' \operatorname{sh} x - 1 = 0$	$\lvert t \rvert > 1$
$\operatorname{Arth} t$	$x' = \operatorname{ch}^2 x$	$\lvert t \rvert < 1$
$\operatorname{Arcth} t$	$x' = -\operatorname{sh}^2 x$	$\lvert t \rvert > 1$

EXEMPLE 1. *On demande de réaliser la fonction* $y(t) = \exp(-t^2)$.

Cette fonction se rencontre fréquemment dans le calcul des probabilités.

Mettons la fonction initiale sous forme d'une composée de deux fonctions: $x(t) = t^2$, $y(t) = \exp[-x(t)]$, et cherchons leurs équations différentielles déterminantes par dérivation successive. Les dérivées sont

$$y'(t) = -\exp[-x(t)]\, x'(t) = -y(t)\, x'(t); \quad x'(t) = 2t; \quad x''(t) = 2.$$

Les équations différentielles déterminantes, ou plus exactement, le système d'équations différentielles avec conditions initiales s'écrit

$$y'(t) = -y(t)\,x'(t); \quad y(0) = 1;$$
$$x''(t) = 2; \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Le schéma fonctionnel réalisant ce système est représenté sur la figure 8.2, *a*. Si on l'examine attentivement on constate qu'il ne contient pas d'opérateurs délivrant $x(t) = t^2$. La variable $x(t)$

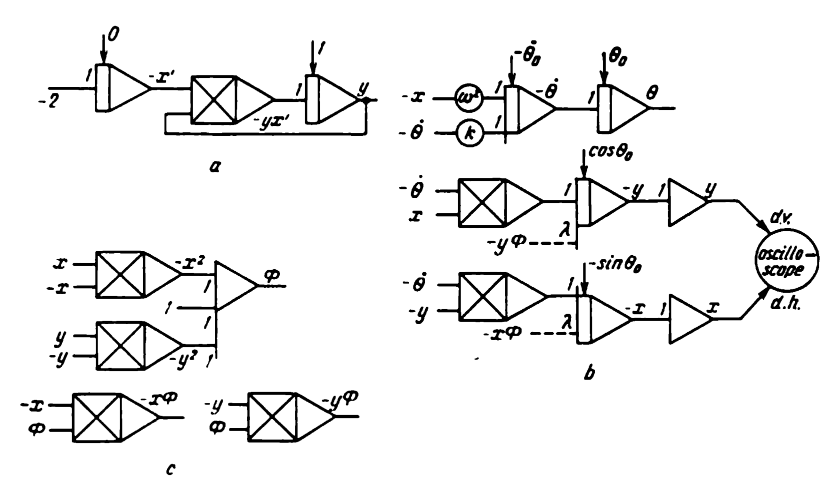


Fig. 8.2

n'est pas indispensable à la génération de la fonction composée exp $[-x(t)]$. Cette particularité est une très importante propriété des fonctions composées. En générant une fonction composée $F(t) = f_2[f_1(t)]$, très souvent il n'est nécessaire de générer que $f_1'(t)$ et non pas $f_1(t)$. En effet, cela découle directement de la règle de dérivation

$$F'(t) = \frac{df_2}{df_1}\frac{df_1}{dt}.$$

La méthode des équations différentielles déterminantes convient bien à la résolution d'équations différentielles ordinaires non linéaires si l'on considère la non-linéarité comme une composition de fonctions. Il est alors possible de passer de l'équation différentielle non linéaire initiale à une équation différentielle d'ordre plus élevé, dont la réalisation sur machine ne nécessite pas de générateurs de fonctions.

Exemple 2. *Résoudre sur machine l'équation différentielle non linéaire*

$$\ddot{\theta}+k\dot{\theta}+\omega^2 \sin\theta=0 \qquad (8.3)$$

avec les conditions initiales

$$\theta(0)=\theta_0;\quad \dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0.$$

Cette équation décrit les oscillations du pendule mathématique dans un milieu opposant une résistance proportionnelle à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de l'écart du pendule. Il est impossible d'exprimer la solution par des fonctions élémentaires. En cherchant la solution sur machine on peut en principe se servir d'un générateur qui délivre la fonction $\sin \theta t$. Cependant, ici, il vaut mieux construire le schéma sans générateur de fonctions, en considérant la fonction $\sin \theta t$ comme la composée des fonctions $\sin\theta$ et $\theta(t)$. Introduisons les deux nouvelles variables

$$x(t)=\sin\theta(t),\quad y(t)=-\cos\theta(t),$$

dont la dérivation nous donne les équations différentielles déterminantes cherchées

$$\dot{x}=-y(t)\,\dot{\theta}(t),\quad \dot{y}=x(t)\,\dot{\theta}(t). \qquad (8.4)$$

Ces équations sont réalisées conjointement avec l'équation initiale de sorte que la machine doit générer la solution du système

$$\ddot{\theta}=-k\dot{\theta}-\omega^2 x(t),$$
$$\dot{x}=-y(t)\,\dot{\theta}(t),$$
$$\dot{y}=x(t)\,\dot{\theta}(t),$$

qui vérifie les conditions initiales

$$\dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0,\quad \theta(0)=\theta_0;$$
$$x(0)=\sin\theta_0;$$
$$y(0)=-\cos\theta_0.$$

Le schéma fonctionnel correspondant à ces équations est représenté sur la figure 8.2, *b*.

D'une façon générale, quand on résout sur machine des équations différentielles non linéaires, on n'a pas intérêt à utiliser d'entrée les générateurs de fonctions réalisant les non-linéarités de la forme $F_1[y,(t)]$, $F_2[y'(t)]$, $F_3[y''(t)]$, etc. L'usage des générateurs de fonctions n'est pas toujours souhaitable, car ils nécessitent un travail

supplémentaire de mise au point. Si, pour la fonction F, l'on dispose d'une équation différentielle simple à solutions stables, il est préférable de se servir de la méthode des équations déterminantes pour réaliser les non-linéarités et partant, éviter d'utiliser des générateurs de fonctions. Il est vrai qu'il faudra faire appel à des multiplieurs et l'ordre de l'équation sera plus élevé, mais dans la plupart des cas il faut bien moins de travail et de temps pour préparer la machine à générer la solution que pour mettre au point les générateurs de fonctions correspondants.

Même si le passage d'une non-linéarité du type $F_1[y(t)]$, $F_2[y'(t)]$, $F_3[y''(t)]$, etc., à une non-linéarité du type produit fait apparaître des solutions instables, la situation n'est pas désespérée, car il existe des méthodes qui permettent de minimiser l'effet de l'instabilité. Illustrons une de ces méthodes sur les équations (8.3) et (8.4). Celle-ci se base sur la méthode de pénalisation (§ 4, chapitre 10) et consiste à chercher des relations mathématiques évidentes entre les variables du problème. En général, l'instabilité viole ces relations et l'erreur qui en résulte peut être utilisée pour « corriger » la solution.

Dans notre exemple les variables x et y vérifient l'identité évidente

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{8.5}$$

Le système d'équations (8.4) devient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y\dot{\theta} - \frac{\lambda}{2}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ \dot{y} &= x\dot{\theta} - \frac{\lambda}{2}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{8.6}$$

où $\lambda \gg 1$ et les termes supplémentaires $\frac{\lambda}{2}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ et $\frac{\lambda}{2}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ déplacent le point représentatif du système (8.4) dans le sens du minimum de la fonctionnelle $\frac{\lambda}{4}\Phi^2(x, y)$, lequel minimum est égal à zéro et est atteint sur le cercle (8.5). Compte tenu de (8.5), le système (8.6) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y\dot{\theta} - \lambda x(x^2+y^2-1), \\ \dot{y} &= x\dot{\theta} - \lambda y(x^2+y^2-1). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Tant que le point représentatif du système (8.7) se trouve sur la courbe (8.5), le système d'équations (8.7) ne diffère pas du système (8.4). La réalisation des termes supplémentaires (8.7) sur machine nécessite encore quatre multiplieurs. Le schéma fonctionnel correspondant est représenté sur la figure 8.2, c.

§ 3. Génération de fonctions données tabulairement, graphiquement ou par une expression analytique compliquée

Lorsqu'on se livre à des expériences, la dépendance fonctionnelle cherchée est souvent obtenue sous forme d'une table faisant correspondre les valeurs discrètes de l'argument aux valeurs de la fonction

x	x_0	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_j	...	y_n

. (8.8)

Une autre forme très répandue de représentation des données expérimentales est la forme graphique. Les graphes sont tracés à l'aide d'instruments spéciaux appelés enregistreurs. L'enregistreur à ruban ou autre représente la courbe de variations de tel ou tel paramètre. On se sert de l'une des méthodes suivantes pour réaliser sur machine les fonctions données sous cette forme.

La première consiste à approcher préalablement la dépendance fonctionnelle initiale, donnée tabulairement ou graphiquement, par une expression analytique facilement réalisable sur la machine.

La deuxième consiste à utiliser des générateurs de fonctions non linéaires. Dans ce cas la dépendance initiale est approchée par une fonction linéaire par morceaux, qui est ensuite réalisée à l'aide de générateurs de fonctions.

Arrêtons-nous sur la première méthode. Nous allons nous limiter à l'examen de la méthode la plus répandue, la *méthode des moindres carrés* et nous en signalerons les particularités quant à la génération de fonctions sur machine.

Supposons que la dépendance fonctionnelle initiale est donnée par la table (8.8). On cherchera l'expression analytique approchée sous la forme du polynôme suivant: $\sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x)$ où $\varphi_i(x)$ est un système de fonctions choisi *a priori*; c_i des coefficients inconnus qu'il faut déterminer par l'intermédiaire des valeurs tabulaires x_j, y_j.

En général le nombre $m+1$ des coefficients inconnus est de beaucoup inférieur au nombre $n+1$ de points en lesquels est donnée la fonction initiale, i.e. $m \ll n$. Pour déterminer les c_i on compose préalablement la fonction

$$S(c_0, c_1, \ldots, c_m) = \sum_{j=0}^{n} \left[y_j - \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x_j)\right]^2.$$

Cette fonction est la somme des carrés des écarts de la fonction initiale par rapport au polynôme approximisant aux points donnés x_j. En effet, $y_j - \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x_j)$ représente l'écart de la dépendance fonctionnelle au point x_j par rapport à la valeur initiale y_j. Il est clair que la valeur de la fonction $S(c_0, c_1, \ldots, c_m)$ dépend seulement de l'adéquation du choix des valeurs c_i. On cherchera les coefficients c_i à partir de la condition de minimum de la fonction $S(c_0, c_1, \ldots, c_m)$. Les conditions nécessaires d'extrémum de cette fonction nous fournissent un système d'équations pour la détermination des inconnues :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial c_i} = \sum_{j=0}^{n} \left[y_j - \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x_j) \right] \varphi_i(x_j) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Parfois, lorsque la fonction à réaliser est donnée analytiquement, et que cette expression analytique est difficile à réaliser par les techniques analogiques, on remplace la dépendance analytique initiale par une autre expression analytique approchée.

Soit donnée sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ une fonction $f(x)$ qu'il faut approcher par un système de fonctions $\varphi_i(x)$. Prenons la fonction de la forme

$$S(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m) = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x) \right]^2 dx.$$

On cherchera une collection de c_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, qui assure le minimum de $S(c_0, c_1, \ldots, c_m)$. Comme précédemment, les conditions nécessaires d'extrémum donnent un système d'équations pour la détermination des inconnues c_i :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial c_i} = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x) \right] \varphi_i(x)\, dx = 0.$$

La réalisation de la dépendance analytique approchée sur machine n'a de raison d'être que si elle est simple, i.e. met en jeu peu d'opérateurs. Ce qui impose certaines contraintes à la classe de fonctions $\varphi_i(x)$ sur lesquelles est développée la dépendance fonctionnelle initiale. Les éléments de cette classe doivent être facilement réalisables sur machine, par exemple des polynômes algébriques ou exponentiels. Les polynômes de degré l sont de la forme $\sum_{k=0}^{l} d_k x^k$, les polynômes exponentiels de la forme

$$\sum_{k=0}^{l} A_k \exp \alpha_k x.$$

Si l'on se sert de l'approximation exponentielle, deux cas intéressants sont à distinguer. Premier cas : les exposants α_k sont connus à l'avance. La détermination des coefficients inconnus A_k se ramène alors à la résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires. Deuxième cas : A_k et α_k sont inconnus. Pour déterminer ces coefficients inconnus il faut résoudre des systèmes d'équations non linéaires plus compliqués.

Les polynômes trigonométriques sont les moins commodes à réaliser si bien sûr la machine ne comporte pas suffisamment de générateurs de fonctions trigonométriques.

§ 4. Génération de fonctions discontinues et polygonales

L'étude sur machine de nombreux processus mécaniques et électriques implique la génération de fonctions continues par morceaux et différentiables par morceaux. En mécanique, et surtout en résistance des matériaux, les fonctions discontinues apparaissent par suite de l'action de forces ponctuelles ou de couples de forces sur un système mécanique quelconque, par exemple sur une poutre.

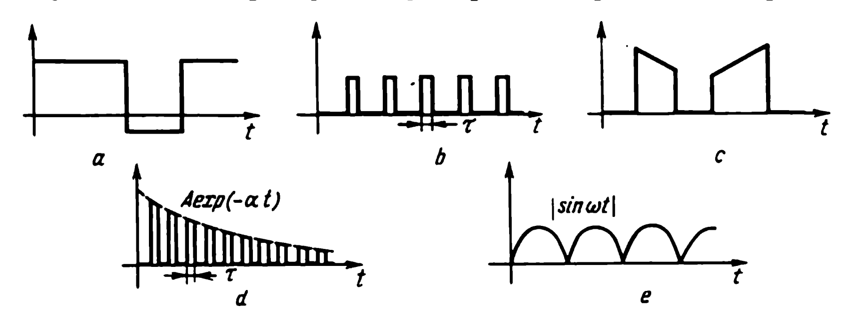


Fig. 8.3

En électricité, et notamment en technique impulsionnelle, les fonctions discontinues ont la forme d'une suite d'impulsions électriques arbitraires. Certains types de fonctions discontinues sont représentées sur la figure 8.3. La figure 8.3, *a* représente une fonction continue par morceaux présentant deux points de discontinuité de première espèce ; la figure 8.3, *b* montre une fonction sous forme d'une suite d'impulsions rectangulaires ; la figure 8.3, *c* des impulsions de forme arbitraire ; la figure 8.3, *d* une suite d'impulsions modulées en amplitude par la fonction $A \exp(-\alpha t)$; la figure 8.3, *e* la fonction différentiable par morceaux $y = |\sin \omega t|$.

Le nombre d'exemples de fonctions discontinues peut être prolongé à l'infini. Cependant à la lumière de ces exemples on constate

que la non-dérivabilité de ces fonctions interdit d'utiliser la méthode des équations différentielles déterminantes.

1. **Fonctions discontinues.** Les fonctions qui présentent des discontinuités de première espèce sont réalisées sur la machine avec une méthode dont le principe diffère de celui de la méthode des équations différentielles déterminantes. Les sauts sont réalisés par des schémas à relais dont le fonctionnement a été examiné en détail au § 10 du chapitre 2. Rappelons brièvement deux types de schémas à relais.

Les schémas du premier type sont dits à contacts. Un modèle est représenté sur la figure 8.4, *a*. Le relais *Rel* fonctionne dès que la tension d'entrée $u_{ent}(t)$ devient négative. Les contacts normalement

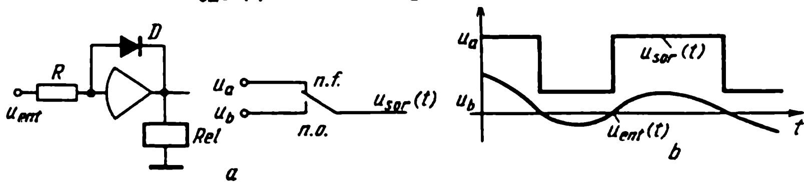


Fig. 8.4

ouverts se ferment, les contacts normalement fermés s'ouvrent. Si l'on applique la tension u_a sur un contact normalement fermé et la tension u_b sur un contact normalement ouvert, à la sortie du contact neutre on aura une tension u_{sor} égale à u_a ou u_b selon le signe de la tension d'entrée (fig. 8.4, *b*). Dans un schéma à relais à contacts les tensions u_a et u_b peuvent être des tensions continues positives ou négatives, ensemble ou séparément, ou des fonctions du temps $u_a(t)$, $u_b(t)$, i.e.

$$u_{sor} = \begin{cases} u_a(t) & \text{si} \quad u_{ent}(t) > 0, \\ u_b(t) & \text{si} \quad u_{ent}(t) < 0. \end{cases}$$

Les schémas du second type sont sans contacts. Le montage le plus répandu est représenté sur la figure 8.5, *a*. Lorsque la tension d'entrée cesse d'être positive pour devenir négative, la tension de sortie subit un saut de $-u_b$ à $+u_a$, i.e.

$$u_{sor} = \begin{cases} -u_b & \text{si} \quad u_{ent}(t) > 0, \\ +u_a & \text{si} \quad u_{ent}(t) < 0. \end{cases}$$

La valeur absolue de u_a et u_b peut varier de 0 à 100 volts (fig. 8.5, *b*).

Dans les deux variantes de schémas à relais, l'instant du saut de la fonction de sortie est déterminé par le zéro de la fonction d'entrée. Donc, en réalisant des fonctions discontinues données. il importe avant toute chose de choisir une fonction d'entrée *auxiliaire* dont les zéros correspondent aux abscisses des sauts de la fonction,

Le caractère des variations de la fonction auxiliaire par rapport au temps importe peu, ce qui est important c'est que l'emplacement des zéros corresponde aux abscisses des sauts. Il est bien entendu que la variable machine qui représente la fonction auxiliaire ne doit pas quitter la plage ± 100 V.

La synthèse de la fonction auxiliaire d'après ses zéros donnés sur un intervalle n'est pas unique. On peut former un grand nombre

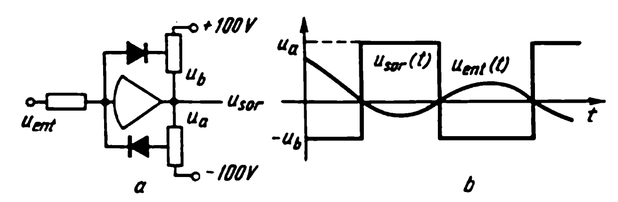


Fig. 8.5

de fonctions arbitraires dont les zéros sont confondus sur l'intervalle en question. La fonction auxiliaire doit être facilement réalisable sur machine. Nous avons vu que les fonctions facilement réalisables étaient à chercher parmi les fonctions multidifférentiables qui admettent des équations différentielles déterminantes assez simples.

Deux cas de répartition des zéros présentent un intérêt pratique. Le premier correspond à une répartition arbitraire. Le second à une répartition de pas constant. Lorsque les zéros sont arbitrairement répartis sur l'intervalle donné $[0, t^*]$, on peut prendre pour fonction auxiliaire le polynôme algébrique $y(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$ de degré n ou le polynôme exponentiel $\sum_{j=0}^{n} c_j \exp \alpha_j t$. Le polynôme algébrique dépend de $n+1$ paramètres, l'exponentiel de $2n+1$ paramètres. Les équations différentielles déterminantes des deux polynômes sont linéaires, d'ordre n, et de coefficients dépendant des paramètres des polynômes. Le polynôme algébrique est à préférer pour la réalisation, car son expression analytique en fait apparaître immédiatement les zéros, et il n'est donc pas nécessaire de déterminer les paramètres d'après les zéros. Si les zéros sont les abscisses $t_1, t_2, \ldots, t_n$, le polynôme sera de la forme

$$y(t) = \prod_{j=1}^{n} (t - t_j).$$

Considérons quelques exemples dans lesquels on supposera que la fonction à réaliser est définie sur l'intervalle $[0, 1]$. On se servira essentiellement de schémas sans contacts.

EXEMPLE 1. *Réaliser la fonction $x(t)$ représentée sur la figure* 8.6, *a*.

La fonction initiale présente un saut. Donc la fonction auxiliaire possède un zéro. Prenons cette fonction sous la forme d'un binôme

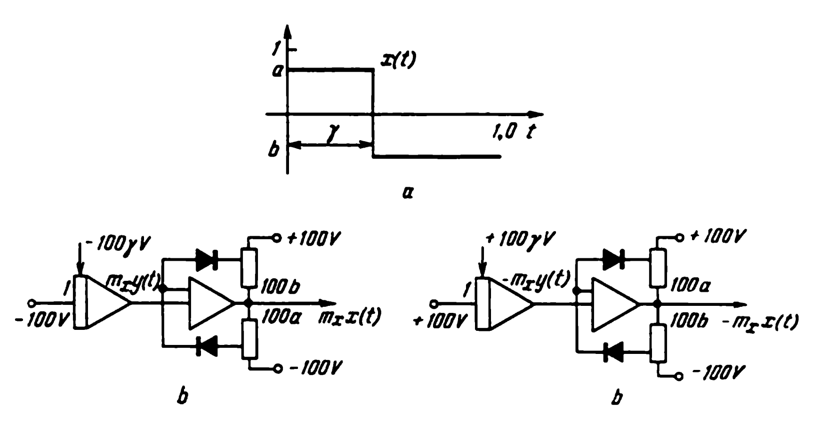


Fig. 8.6

du premier degré $y(t) = t - \gamma$. L'équation différentielle déterminante s'écrit

$$y'(t) = 1, \; y(0) = -\gamma.$$

Le schéma de commutation qui délivre $x(t)$ à l'échelle $m_x = 100$ est représenté sur la figure 8.6, *b*. La fonction auxiliaire $y(t)$ est représentée à la même échelle. L'intégrateur placé à l'entrée du schéma à relais délivre la fonction auxiliaire $y(t)$ conformément à son équation différentielle déterminante. A la sortie du schéma à relais on obtient la fonction donnée $x(t)$. La particularité de ce schéma de commutation consiste dans le fait qu'en modifiant le paramètre γ on peut décaler le saut de la fonction $x(t)$ en un point quelconque de l'intervalle [0, 1].

Si la fonction à réaliser est $-x(t)$, il suffit de changer le signe de la fonction auxiliaire. Le schéma fonctionnel correspondant est représenté sur la figure 8.6, *c*.

EXEMPLE 2. *Réaliser la fonction $x(t)$ représentée sur la figure* 8.7, *a*.

La fonction initiale présente un saut. Prenons la fonction auxiliaire de la même forme que dans l'exemple 1 :

$$y(t) = -(t - \gamma).$$

Un schéma à relais sans contacts ne peut pas réaliser des constantes a et b de même signe. Si l'on dispose d'un schéma à relais, on réalisera la fonction $x(t) - b$ et ensuite on ajoutera la variable de sortie à la

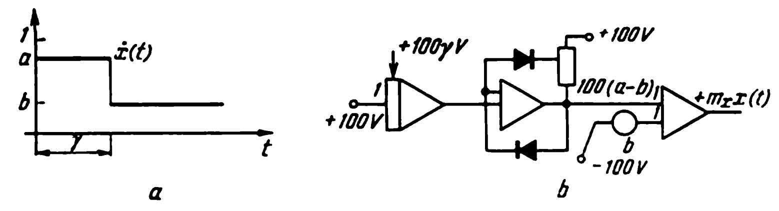


Fig. 8.7

constante b. Le schéma de commutation est représenté sur la figure 8.7, b. Il diffère du schéma précédent par le sommateur destiné à effectuer l'addition indiquée.

Exemple 3. *Réaliser la fonction* $x(t)$ *représentée sur la figure* 8.8, a.

La fonction présente deux sauts de même grandeur. Prenons la fonction auxiliaire sous forme d'un trinôme du second degré $y(t) = (t - \gamma_1)(t - \gamma_2)$ dont les zéros sont γ_1 et γ_2. L'équation différentielle déterminante de la fonction auxiliaire s'obtient par une double

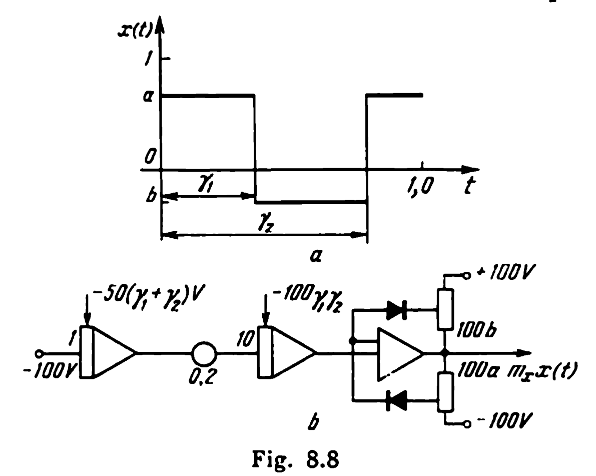


Fig. 8.8

dérivation : $y'(t) = 2t - (\gamma_1 + \gamma_2)$, $y''(t) = 2$, d'où il vient $y''(t) = 2$, $y'(0) = -(\gamma_1 + \gamma_2)$, $y(0) = \gamma_1, \gamma_2$.

La réalisation de l'équation déterminante nécessite deux intégrateurs. Le schéma de commutation est représenté sur la figure 8.8, b. La variable de sortie du schéma à relais représente la fonction donnée $x(t)$ à l'échelle $m_x = 100$. En modifiant les condi-

tions initiales des intégrateurs on peut faire en sorte que les sauts se présentent dans des points arbitraires de l'intervalle [0, 1].

Dans les exemples 1, 2 et 3, les abscisses des sauts étaient arbitraires. Si les abscisses obéissent à une loi quelconque, on peut mettre cette dernière à profit pour simplifier le schéma qui produit la fonction auxiliaire.

EXEMPLE 4. *Réaliser la fonction* $x(t)$ *de la figure* 8.9, *a*. La fonction $x(t)$ est une suite périodique d'impulsions rectangulaires de période T, d'amplitude constante a et de durée constante τ.

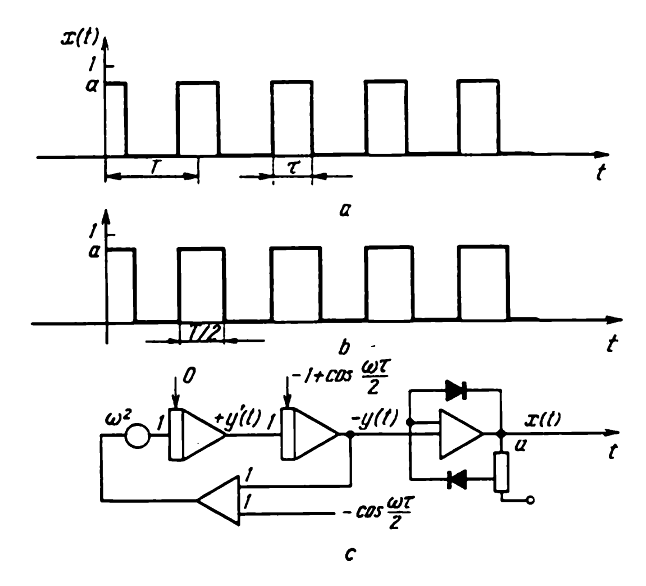


Fig. 8.9

On remarque que les zéros de la fonction auxiliaire sont également ceux de la fonction $y(t) = -A + \cos \omega t$, où $-1 < A < 1$ et $\omega = 2\pi/T$.

La quantité A dépend de la durée d'impulsions τ. Pour déterminer A considérons l'instant où $t = \frac{\tau}{2}$. Le point $\frac{\tau}{2}$ étant un zéro de la fonction $y(t)$, on doit avoir $-A + \cos \omega \frac{\tau}{2} = 0$, d'où $A = \cos \omega \frac{\tau}{2}$ et la fonction auxiliaire sera

$$y(t) = -\cos \omega \frac{\tau}{2} + \cos \omega t.$$

On n'a aucune peine à établir l'équation différentielle déterminante de cette fonction. Des dérivations successives donnent

$$y'(t) = -\omega \sin \omega t, \quad y''(t) = -\omega^2 \cos \omega t,$$

d'où

$$y''(t) = -\omega^2 y - \omega^2 \cos \omega \frac{\tau}{2},$$

$$y(0) = 1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}, \quad y'(0) = 0.$$

Le schéma fonctionnel est représenté sur la figure 8.9, *c*, où le schéma à relais est réglé sur les limites $+a$, 0.

La fonction auxiliaire $y(t)$ est restituée par deux intégrateurs et un inverseur. Si $\tau = \frac{T}{2}$, $A = 0$ et la fonction $x(t)$ est délivrée sous forme d'une onde rectangulaire positive (fig. 8.9, *b*).

Considérons une méthode de réalisation d'une suite d'impulsions dont l'amplitude dépend d'une fonction donnée $z(t)$. On dit dans ce cas que l'amplitude des impulsions est modulée par la fonction $z(t)$. La fonction $z(t)$ est appelée *enveloppe*, la suite des impulsions rectangulaires, *suite porteuse*.

Il n'est pas très difficile d'obtenir sur la machine une suite modulée d'impulsions une fois qu'on a appris à réaliser une suite quel-

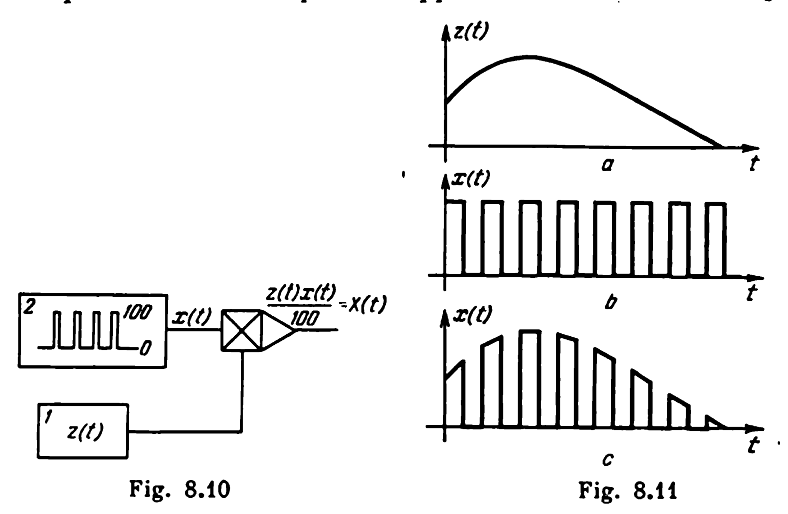


Fig. 8.10 Fig. 8.11

conque d'impulsions rectangulaires. La modulation de la porteuse par les valeurs de l'enveloppe se ramène à des produits. Le schéma fonctionnel de la modulation est représenté sur la figure 8.10. Le bloc *1* délivre l'enveloppe $z(t)$, le bloc *2* la suite porteuse d'impulsions rectangulaires avec des paramètres donnés. Parmi ces derniers figu-

rent la durée d'impulsions τ et leur période T. A noter que l'amplitude n'est pas un paramètre. Elle est fixe et doit être représentée par une tension électrique de 100 V. Ceci est dû au fait que la multiplication est réalisée par des multiplieurs de facteur d'échelle $\mu = 0{,}01$.

La figure 8.11, *a* représente l'enveloppe $z(t)$; la figure 8,11, *b* la suite d'impulsions donnée; la figure 8.11, *c* le résultat du produit des graphes des figures 8.11, *a* et *b*.

2. Fonctions polygonales. On appelle fonction polygonale sur l'intervalle [0, 1] une fonction univoque définie comme suit:

$$f(t)=\begin{cases}\varphi_1(t), & 0\leqslant t<\gamma_1,\\ \varphi_2(t), & \gamma_1\leqslant t<\gamma_2,\\ \varphi_3(t), & \gamma_2\leqslant t<1.\end{cases}$$

Cette fonction est composée de trois morceaux. D'une fraçon générale, aux points γ_1, γ_2 de subdivision de l'intervalle [0,1] on peut avoir des discontinuités de première espèce. Cependant nous n'examinerons ici que des fonctions polygonales continues.

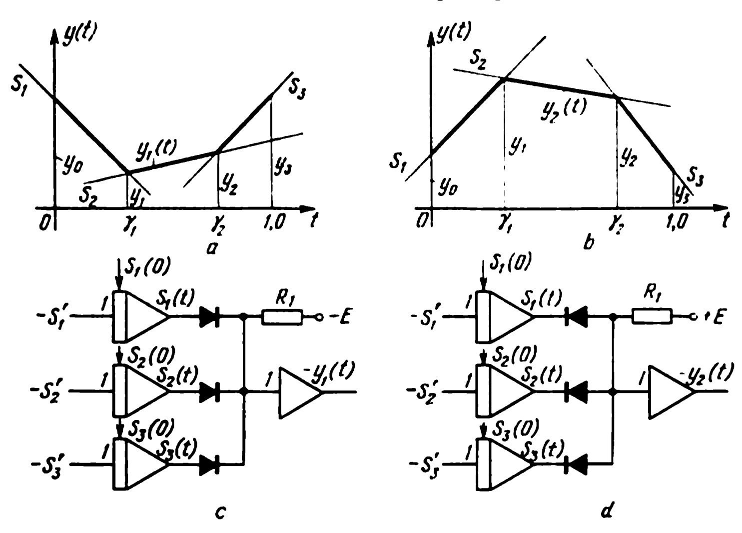


Fig. 8.12

La figure 8.12, *a* et *b*, représente des fonctions polygonales $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Désignons par S_1, S_2, S_3 les équations des segments de la fonction polygonale. On remarque aisément que

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \max\{S_1(t),\ S_2(t),\ S_3(t)\},\\ y_2(t) &= \min\{S_1(t),\ S_2(t),\ S_3(t)\}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Les équations (8.9) sont faciles à réaliser sur machine à l'aide des schémas de maximisation et de minimisation. Pour ce qui est des fonctions $S_1(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$, elles possèdent des équations différentielles déterminantes simples. A partir de la figure 8.12, a et b, on déduit facilement les équations différentielles déterminantes

$$S_1'(t)=\frac{y_1-y_0}{\gamma_1},\quad S_1(0)=y_0;\quad S_2'(t)=\frac{y_2-y_1}{\gamma_2-\gamma_1},$$

$$S_2(0)=y_1-\frac{y_2-y_1}{\gamma_2-\gamma_1}\gamma_1;$$

$$S_3'(t)=\frac{y_3-y_2}{1-\gamma_2},\quad S_3(0)=y_2-\frac{y_3-y_2}{1-\gamma_2}\gamma_2.$$

Les schémas fonctionnels délivrant $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont représentés sur la figure 8.12, *c* et *d*. Ces schémas comportent trois intégrateurs chacun pour la réalisation de $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S_3(t)$ et des circuits portes, qui ne laissent passer que les valeurs maximales ou minimales des variables correspondantes. La résistance $R_1 \ll R$, où R est la valeur ohmique de la résistance d'entrée de l'inverseur. Dans le schéma de minimisation, $|E| > S_j(t)$ pour $j = 1, 2, 3$. Ce schéma réalise la fonction $-y_2(t) = -\min\{S_1(t), S_2(t), S_3(t), E\}$. Compte tenu de la remarque faite sur le choix de la quantité E, il est évident que

$$\min\{S_1(t),\ S_2(t),\ S_3(t),\ E\} = \min\{S_1(t),\ S_2(t),\ S_3(t)\}.$$

Dans le schéma de maximisation on a également $|E| > S_j(t)$ pour $j = 1, 2, 3$. Le schéma réalise la fonction

$$-y_1(t) = -\max\{S_1(t),\ S_2(t),\ S_3(t),\ -E\} = -\max\{S_1(t),\ S_2(t),\ S_3(t)\}.$$

On aurait pu se passer de la quantité auxiliaire E, mais dans ce cas il aurait fallu appliquer l'une des variables $S_j(t)$ à l'entrée de l'inverseur non pas à travers la diode, mais à travers la résistance R_1, et cette variable n'aurait pas eu la même échelle que les autres $S(t)$. Ce procédé n'est pas très commode, car il nécessite un travail supplémentaire pour l'adaptation des échelles. On lui préférera donc le schéma qui fait intervenir la quantité auxiliaire E.

§ 5. Exemple de composition d'un programme complet pour la génération d'une fonction donnée

Pour générer des fonctions données d'une variable indépendante, nous avons composé les programmes au niveau des schémas fonctionnels. A titre d'exemple effectuons une programmation complète du calculateur MH-7M jusqu'au niveau du schéma de commutation.

Soit à réaliser la fonction $y(t) = \sin t^2$ sur l'intervalle $[0, 4]$. L'élaboration du programme se fait en plusieurs étapes.

1. Analyse du problème. Le but de cette étape est de trouver l'équation différentielle déterminante ou un système d'équations pour la fonction $y(t) = \sin t^2$.

Désignons la fonction initiale par $y_1(t) = \sin t^2$ et introduisons deux fonctions auxiliaires $y_2(t) = \cos t^2$ et $x(t) = t^2$. Des dérivations successives donnent

$$y_1'(t) = \cos x(t)\, x'(t), \quad y_2'(t) = -\sin x(t)\, x'(t), \quad x'(t) = 2t, \quad x''(t) = 2,$$

et le système d'équations déterminantes cherché s'écrit :

$$y_1'(t) = y_2(t)\, x'(t), \quad y_1(0) = 0;$$
$$y_2'(t) = -y_1(t)\, x'(t), \quad y_2(0) = 1;$$
$$x''(t) = 2, \quad x'(0) = x(0) = 0.$$

2. Etablissement du schéma fonctionnel. Le schéma fonctionnel est construit pour des variables mathématiques. Dans notre cas, le système d'équations différentielles est résolu par rapport aux

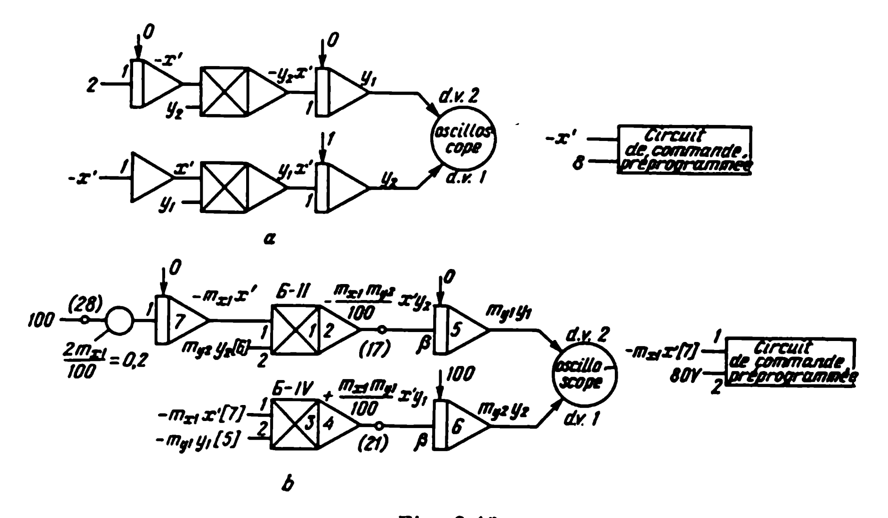


Fig. 8.13

dérivées supérieures ; on peut donc se servir de la méthode générale, laquelle nous donne le schéma de la figure 8.13, *a*. Ce schéma ne délivre pas la variable $x(t)$, qui est d'ailleurs inutile pour former la fonction initiale $y(t) = \sin t^2$. Le schéma prévoit l'arrêt de la machine par programme à partir de l'instant $t = 4$; on se sert à cet effet de la variable $-x'(t)$ qui, pour $t = 4$, vaut -8.

3. Choix des échelles des variables mathématiques dépendantes. L'objet de cette étape est de déterminer les échelles de représentation

des variables mathématiques par des variables machine, i.e. par des tensions électriques. Les échelles sont données dans le tableau :

Tableau 8.2

Variable	Maximum de la variable		Echelle	Symbole de l'échelle
	exact	arrondi		
$y_1(t)$	1	1	$100/1=100$	m_{y1}
$y_2(t)$	1	1	$100/1=100$	m_{y2}
$x'(t)$	8	10	$100/10=10$	m_{x1}

Pour la commodité des calculs la valeur maximale de la variable $x'(t)$ a été arrondie à 10.

4. **Mise au point du schéma de commutation, adaptation des échelles.** Le schéma de commutation est construit pour une machine donnée. Dans le cas de la machine MH-7M, le schéma est représenté sur la figure 8.13, *b*. Le schéma de commutation porte les numéros des opérateurs qui seront utilisés et les numéros de leurs entrées. Les coefficients de transfert des intégrateurs 5 et 6 sont inconnus. Le coefficient de transfert β doit faire concorder les échelles des variables $y_1(t)$ et $y_2(t)$ avec celles des variables de sortie des multiplieurs. Le but de cette concordance est de compenser l'échelle 0,01 des multiplieurs.

Définissons β pour l'intégrateur 5. A l'entrée est appliquée la variable mathématique

$$y_1'(t)=y_2(t)\,x'(t). \tag{8.10}$$

Compte tenu des échelles, à l'équation (8.10) est associée l'équation pour les tensions électriques

$$m_{y1}y_1(t)=\beta\frac{m_{x1}m_{y2}}{100}\,y_2(t)\,x'(t)$$

ou

$$y_1'(t)=\beta\frac{m_{x1}m_{y2}}{100m_{y1}}\,y_2(t)\,x'(t). \tag{8.11}$$

En comparant les coefficients des égalités (8.10) et (8.11) on obtient pour la détermination de β l'équation suivante :

$$\beta\frac{m_{x1}m_{y2}}{100m_{y1}}=1,$$

d'où

$$\beta=\frac{100m_{y1}}{m_{x1}m_{y2}}=10.$$

Ceci achève la mise au point du programme de réalisation sur MH-7M de la fonction sin t^2.

§ 6. Etude de fonctions données sur machine

Lorsqu'on étudie des fonctions données de la variable indépendante on a toujours intérêt à trouver la courbe représentative de la fonction, ceux de ses points qui jouissent de propriétés particulières et ses asymptotes. L'étude des courbes à l'aide de la machine, étude qui présente un intérêt en soi, s'impose lors de l'analyse des solutions des équations différentielles. L'utilisation de la machine permet de simplifier l'étude de la courbe. Mais auparavant il faudra la réaliser sur la machine de telle sorte que le programme soit interrompu aux points où elle possède les propriétés qui nous intéressent. On peut observer l'image de la courbe sur l'écran de l'indicateur électronique.

On est souvent confronté à des problèmes dans lesquels il faut étudier conjointement plusieurs courbes. Dans ces cas on détermine en premier lieu les points d'intersection de ces courbes.

La réalisation des courbes sur machine est basée sur la méthode des équations différentielles déterminantes. Il n'est pas facile de trouver pour toute fonction une équation différentielle assez simple et aisément réalisable sur machine. Ceci impose certaines contraintes à la classe des fonctions étudiées. Par ailleurs, la plage de variation des variables machine étant bornée, il n'est pas toujours très facile de trouver les asymptotes verticales et obliques de la courbe.

Le procédé de définition de la courbe initiale peut simplifier la réalisation et l'étude sur machine. Il existe trois procédés.

1. La courbe est donnée explicitement. C'est le cas le plus simple. La courbe est donnée par l'équation $y(t) = f(t)$. L'étude se réduit à la recherche des racines des équations $f(t) = 0$, $f'(t) = 0$, $f''(t) = 0$ à l'aide d'un circuit de commande préprogrammée. Les racines de la première équation sont les points d'intersection de la courbe avec l'axe des t. Les racines de la deuxième équation sont des points extrémums (maximums ou minimums locaux). Les racines de la troisième équation sont les abscisses des points d'inflexion. Bien entendu, il est indispensable que l'ordre de l'équation différentielle déterminante ne soit pas inférieur à deux. Autrement les variables $y''(t)$, $y'(t)$ ne pourront être explicitées et utilisées pour l'interruption du circuit de commande préprogrammée.

2. La courbe est donnée paramétriquement. L'équation paramétrique de la courbe est $y(t) = f_1(t)$, $x(t) = f_2(t)$. Chacune de ces fonctions peut être réalisée par la méthode des équations différentielles déterminantes. Le paramètre t est assimilé au temps machine. La courbe est représentée sur l'écran de l'indicateur.

Les points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées sont déterminés à l'aide de l'interruption du programme d'exécution à la réalisation de la condition $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = 0$.

Les extrémums (les points en lesquels la tangente est horizontale et verticale) se trouvent à partir de la condition

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=0, \quad \frac{dx}{dy}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=0$$

ou, ce qui est équivalent,

$$f_1'(t)=0; \quad f_2'(t)=0.$$

Les points indiquent que la dérivée est prise par rapport à t.

Les points d'inflexion se déduisent à partir de

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dddot{y}\dddot{x}-\dddot{y}\dddot{x}}{(\dot{x})^3}=0 \quad \text{ou} \quad \dddot{y}\dddot{x}-\dddot{y}\dddot{x}=0.$$

3. La courbe est donnée implicitement. Pour réaliser la courbe $F(x, y) = 0$, on passe de la forme implicite à la forme paramétrique $x(t)$, $y(t)$. Exposons la méthode qui permet immédiatement de trouver les équations différentielles déterminantes pour $x(t)$, $y(t)$ d'après l'équation $F(x, y) = 0$ sans chercher les expressions analytiques de $x(t)$, $y(t)$.

1) *La courbe est plane.* Si un point de coordonnées $x(t)$, $y(t)$ est situé sur la courbe $F(x, y) = 0$, la dérivée de $F(x, y)$ par rapport à t est nulle, i.e. : $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$. Cette identité est valable quelle que soit l'équation paramétrique de la courbe $F(x, y) = 0$. Elle vaut également dans le cas où

$$\frac{dx}{dt}=\omega\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt}=-\omega\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{8.12}$$

où $\omega \neq 0$ est un nombre arbitraire.

Les expressions (8.12) sont les équations différentielles déterminantes des fonctions $x(t)$, $y(t)$. A ces équations il faut adjoindre les conditions $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ qui traduisent le fait que la courbe initiale $F(x, y) = 0$ est réalisée à partir du point (x_0, y_0) qui est pris pour origine. L'origine (x_0, y_0) partage la courbe en deux branches, dont l'une est réalisée pour $\omega > 0$ et l'autre pour $\omega < 0$. La vitesse de réalisation de la courbe est définie par la valeur absolue du nombre ω.

A titre d'illustration cherchons le système d'équations différentielles déterminantes d'une conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G = 0. \tag{8.13}$$

Calculons les dérivées en vertu de (8.12). Il vient $\frac{dx}{dt} = \omega(Bx + Cy + E)$, $\frac{dy}{dt} = -\omega(Ax + By + D)$. La machine délivrera une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que le discriminant $AC - B^2$ sera positif, nul ou négatif.

2) Courbe gauche. Supposons qu'on ait à réaliser une courbe gauche qui soit l'intersection de deux surfaces:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \tag{8.14}$$

Pour passer des équations (8.14) à la forme paramétrique, il nous faut chercher le système correspondant d'équations différentielles déterminantes pour les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. En dérivant les fonctions $F_1(x, y, z)$ et $F_2(x, y, z)$ par rapport au paramètre t et en les égalant à zéro, on obtient un système de deux équations algébriques linéaires homogènes en $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0.$$

On sait que ces systèmes admettent une infinité de solutions non nulles telles que

$$\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(-\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dz}{dt}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial x}\end{vmatrix}.$$

En particulier, la solution sera

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\omega\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial y}\right];\\ \frac{dy}{dt}&=-\omega\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x}\right];\\ \frac{dz}{dt}&=\omega\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}\right],\end{aligned}\tag{8.15}$$

où ω est un nombre arbitraire non nul.

Les expressions (8.15) sont les équations différentielles déterminantes cherchées des fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. A ces équations il faut ajouter les conditions initiales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, qui traduisent le fait que la courbe initiale est réalisée à partir du point (x_0, y_0, z_0).

A titre d'illustration cherchons le système d'équations différentielles déterminantes d'une courbe qui soit l'intersection d'une quadrique par un plan:

$$Ax+By+Cz+D=0;$$

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+ \\ +2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

En vertu de (8.15) on obtient le système suivant d'équations différentielles linéaires par rapport aux inconnues $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \omega\,[(a_{33}B - a_{23}C)\,z + (a_{23}B - a_{22}C)\,y + \\ + (a_{31}B - a_{12}C)\,x + a_{34}b - a_{24}C];$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega\,[(a_{33}A - a_{31}C)\,z + (a_{23}A - a_{12}C)\,y + \\ + (a_{31}A - a_{11}C)\,x + a_{34}A - a_{14}C];$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega\,[(a_{23}A - a_{31}B)\,z + (a_{22}A - a_{12}B)\,y + \\ + (a_{12}A - a_{11}B)\,x + a_{24}A - a_{14}B].$$

3) *Application aux machines-outils à commande programmée.* Pour qu'une machine-outil donne à une ébauche la configuration voulue, il faut introduire dans le système de commande automatique un programme de la forme $\dot{x}(t) = \varphi_1(t)$, $\dot{y}(t) = \varphi_2(t)$ (pour une pièce plane) ou $\dot{x}(t) = \varphi_1(t)$, $\dot{y}(t) = \varphi_2(t)$, $\dot{z}(t) = \varphi_3(t)$ (pour l'usinage en trois dimensions). Les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ définissent la vitesse de déplacement de l'outil le long des axes de coordonnées. Les équations de contour de la pièce $\Phi_1(x, y) = 0$ et de l'ébauche $\Phi_2(x, y) = 0$ permettent de calculer $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$. A partir de $\Phi_1(x, y) = 0$ et en fonction du type d'instrument utilisé on définit la trajectoire $F(x, y) = 0$ de l'outil. Par ailleurs, on se sert de (8.12) pour calculer les fonctions $x(t) = \omega(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi_1(t)$, $\dot{y}(t) = -\omega(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi_2(t)$. La fonction $\omega(x, y)$ définit la vitesse de l'instrument (la vitesse de coupe) qui dépend de la surépaisseur à enlever. En chaque point du contour $\Phi_1(x, y) = 0$ de la pièce, la surépaisseur est définie comme la distance, le long de la normale à la courbe $\Phi_1(x, y) = 0$, au contour de l'ébauche $\Phi_2(x, y) = 0$.

4. Définition des points communs des courbes planes. Déterminer les points communs des courbes $F_1(x, y) = 0$ et $F_2(x, y) = 0$ revient à résoudre le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.16)$$

On suppose par ailleurs que le jacobien du système (8.16)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

donc le système (8.16) admet une solution x^*, y^*.

La recherche de x^*, y^* s'effectue à l'aide d'un circuit de commande préprogrammée fonctionnant en régime d'arrêt par programme. Pour cela il faut :

a) réaliser la courbe $F_1(x, y) = 0$ sur la machine en résolvant le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial F_1}{\partial y}, \qquad & x(0) = x_0; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial x}, \qquad & y(0) = y_0; \end{aligned} \tag{8.17}$$

b) réaliser la fonction $F_2(t) = F_2(x, y)$ sur la machine en se servant des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

La fonction $F_2(t)$ est appliquée ensuite à l'entrée du circuit de commande préprogrammée qui interrompt la résolution à l'instant $t = t^*$ tel que $F_2(t^*) = 0$. On obtient les valeurs $x(t^*)$ et $y(t^*)$ qui sont les solutions x^* et y^* du système (8.16) cherchées.

5. **Stabilisation d'un point sur la courbe.** Par stabilisation on entendra les mesures spéciales, propres à assurer au point représentatif le retour sur la courbe donnée qu'il a quittée pour une raison ou une autre. La stabilisation est indispensable pour la raison simple que la résolution des équations différentielles (8.12) ne définit la courbe donnée qu'aux conditions initiales près. En effet, une des conditions initiales pour (8.12) est arbitrairement choisie ; supposons par exemple que $x(0) = x_0$, la deuxième condition initiale, y_0, est alors solution de l'équation $F(x_0, y_0) = 0$. L'erreur qui affecte y_0 conduit à la réalisation d'une autre courbe. L'autre raison, plus importante, de la stabilisation, est l'éventualité de solutions instables du système (8.12) et l'influence des erreurs des opérateurs sur la solution. Tout ceci implique de mettre les équations du système (8.12) sous une forme qui tienne compte de l'écart de la trajectoire $x(t)$, $y(t)$ par rapport à la courbe $F(x, y) = 0$. Citons comme exemple de système ainsi modifié le système suivant

$$\frac{dx}{dt} = \omega\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda F\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda F\frac{\partial F}{\partial y}, \tag{8.18}$$

où $\lambda \gg |\omega|$ est un grand nombre positif ; quant aux termes supplémentaires $\lambda F \frac{\partial F}{\partial x}$ et $\lambda F \frac{\partial F}{\partial x}$, ils tiennent compte de l'écart du point représentatif par rapport à la courbe $F(x, y) = 0$. On remarquera à l'examen de (8.18) que le point représentatif possède sur le plan yOx deux vitesses composantes, dont l'une est dirigée le long de la courbe $F(x, y) = 0$, et l'autre qui lui est normale, dans la direction du minimum de la fonctionnelle $1/2F^2$, qui est nul et atteint sur la courbe donnée.

Si l'on introduit la fonctionnelle $|F|$, il lui correspondra un système d'équations différentielles possédant, quant à la stabilisation, des propriétés similaires à celles du système (8.18):

$$\frac{dx}{dt} = \omega \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \operatorname{sign} F, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \operatorname{sign} F. \quad (8.19)$$

A noter que, dans les deux cas, plus λ est grand, plus la trajectoire tend à se confondre avec la courbe donnée.

§ 7. Exercices

1. Construire les schémas fonctionnels et de commutation pour la réalisation et l'étude sur machine des fonctions de la variable indépendante t:

1) $y(t) = a \sin \omega t$.

2) $y(t) = b \cos \omega t$.

3) $y(t) = t \exp(-\alpha t)$.

4) $y(t) = t^2 \exp(\alpha t)$.

5) $y(t) = \exp(-\alpha t) \sin \omega t$.

6) $y(t) = \sin^2 t$.

7) $y(t) = a \operatorname{sh} \omega t$.

8) $y(t) = b \operatorname{ch} \omega t$.

9) $y(t) = \exp(-\alpha t) \operatorname{sh} \omega t$.

10) $y(t) = \exp(-\alpha t) \operatorname{ch} \omega t$.

11) $y(t) = 1 + t + t^2 + t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

12) $y(t) = (1+t)^{-6,3}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

13) $y(t) = (1+t)^{6,3}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

14) $y(t) = (1+t)^n \exp(-t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

15) $y(t) = \sin \sin t$.

16) $y(t) = \exp(-\sin t)$.

17) $y(t) = \exp(-t \exp(-t))$.

18) $y(t) = \operatorname{Log}(1+t)$.

19) $y(t) = \sin \operatorname{Log}(1+t)$.

20) $y(t) = (1+t)^{-\exp(-t)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

21) La cardioïde

$$\begin{cases} x(t) = \cos t\,(1 + \cos t), \\ y(t) = \sin t\,(1 + \cos t). \end{cases}$$

22) L'astroïde

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = \sin^3 t. \end{cases}$$

23) L'épicycloïde

$$\begin{cases} x(t) = m\cos t - \cos mt, \\ y(t) = m\sin t - \sin mt. \end{cases}$$

Etudier pour m entier $\geqslant 3$.

24) L'hypocycloïde

$$\begin{cases} x(t) = m\cos t + \cos mt, \\ y(t) = m\sin t - \sin mt. \end{cases}$$

Etudier pour m entier $\geqslant 2$.

25) L'épitrochoïde

$$\begin{cases} x(t) = m\cos t - \lambda\cos mt, \\ y(t) = m\sin t - \lambda\sin mt. \end{cases}$$

Etudier pour m entier $\geqslant 3$, $1 < \lambda < 2$.

26) L'hypotrochoïde

$$\begin{cases} x(t) = m\cos t + \lambda\cos mt, \\ y(t) = m\sin t - \lambda\sin mt. \end{cases}$$

Etudier pour m entier $\geqslant 2$, $1 < \lambda < 2$.

27) La rosace

$$\begin{cases} x(t) = \sin(m+1)t + \sin(m-1)t, \\ y(t) = \cos(m+1)t - \cos(m-1)t. \end{cases}$$

28) La spirale de Cornu

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos t^2\,dt, \\ y(t) = \int_0^t \sin t^2\,dt, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5. \end{cases}$$

29) La spirale d'Archimède

$$\begin{cases} x(t) = t\cos t, \\ y(t) = t\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi. \end{cases}$$

30) La spirale logarithmique

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \exp(-t). \\ y(t) = \sin t \exp(-t). \end{cases}$$

31) La développante

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t \sin t, \\ y(t) = \sin t - t \cos t, \ 0 \leqslant t \leqslant 4\pi. \end{cases}$$

32) $x(t) = \min \{t \exp(-t),\ t^2 \exp(-t)\}$.

33) $x(t) = \max \{\sin \omega t,\ \cos \omega t,\ 0\}$.

34) $x(t) = \sin \omega t + |\sin \omega t|$.

35) $x(t) = \min \{\sin \omega t,\ \cos \omega t\}$.

36) $x(t) = \max \{t \exp(-t),\ \sin \omega t\}$.

37) $x(t) = \min \{t \exp(-t),\ \exp(-t^2)\}$.

38) $x(t) = \max \{\exp(-t),\ \exp(-t^2)\}$.

2. Trouver le système d'équations différentielles déterminantes, établir les schémas fonctionnels, réaliser sur machine les courbes suivantes :

1) le cercle

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R^2;$$

2) l'ellipse

$$\frac{(x-a_1)^2}{a^2} + \frac{(y-b_1)^2}{b^2} = 1;$$

3) l'hyperbole

$$\frac{(x-a_1)^2}{a^2} - \frac{(y-b_1)^2}{b^2} = 1;$$

4) la parabole

$$(x-a_1)^2 = k(y-b_1);$$

5) le carré

$$|x| + |y| = 1;$$

6) le carré

$$|x - y| + |x + y| = 2;$$

7) l'hexagone

$$|2y-1| + |2y+1| + \frac{4}{\sqrt{3}}|x| = 4.$$

3. Trouver les points de concours des courbes. En déduire les équations différentielles nécessaires, les résoudre analytiquement

et s'assurer que les points de concours ont été correctement définis :

1) $a_{11}x + a_{12}y - b_1 = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y - b_2 = 0;$

2) $x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad y - kx = 0;$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^2 - ky = 0.$

4. Montrer que si le jacobien du système (8.16) est nul, il est impossible de déterminer les points de concours des courbes (8.16), car $F_2(t) = \text{const}$.

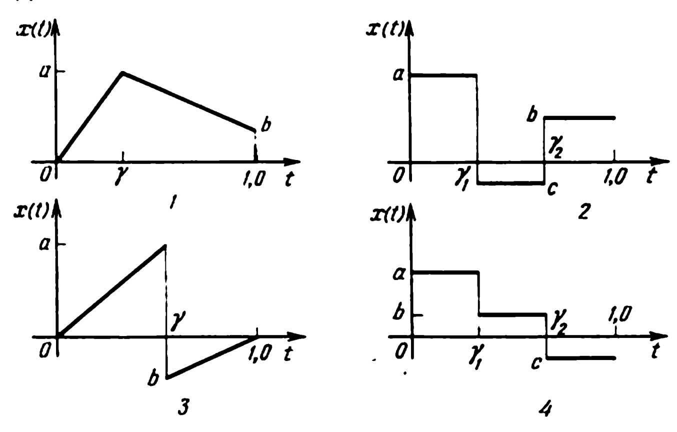


Fig. 8.14

5. Composer les schémas de commutation pour la réalisation sur machine des fonctions représentées sur la figure 8.14.

CHAPITRE 9

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE CONTINUE

§ 1. Algèbre booléenne du choix

L'*algèbre booléenne du choix* est une généralisation de l'algèbre logique. Si l'algèbre logique est largement appliquée dans la synthèse des schémas logiques combinationnels et dans la programmation des calculatrices numériques, l'algèbre du choix, elle, est très utile dans la mise au point des opérateurs à diodes et dans la programmation des calculateurs analogiques.

L'algèbre logique étudie les opérations sur des variables discrètes qui ne peuvent prendre que deux valeurs. L'algèbre du choix étudie pour sa part les opérations sur des variables arbitraires (discrètes et continues) qui sont bornées inférieurement et supérieurement. L'algèbre du choix est souvent appelée *logique continue*. S'agissant de l'algèbre du choix, il ne faut pas croire qu'elle conduit directement au « meilleur » schéma. L'algèbre du choix est utile en ce sens qu'elle permet par des transformations formelles équivalentes d'obtenir un grand nombre de schémas logiques parmi lesquels on choisira le plus commode à la réalisation.

1. Opérations de choix et leurs propriétés. Soit un ensemble M de variables réelles, contenant son majorant p et son minorant q. On appellera *centre de l'ensemble* M le point $\frac{p+q}{2}$. On suppose que l'ensemble M est symétrique par rapport à ce point. Cela signifie que si $x \in M$, son symétrique $\bar{x} = p + q - x$ par rapport au centre appartiendra également à M. Il est clair que lorsque $q = -p$, le centre de l'ensemble est zéro, et deux éléments symétriques diffèrent par leur signe seulement, i.e. $\bar{x} = -x$. Ceci aura lieu en particulier pour $p = 1$ et $q = -1$.

On comprendra que le choix de l'élément $\bar{x} = p + q - x$ symétrique à x est une opération unaire définie sur l'ensemble M. Cette opération est appelée *inversion* et notée inv $x = \bar{x}$.

En plus de l'inversion, munissons l'ensemble M de deux autres opérations de choix:

$$\max\{x_1, x_2\} = \begin{cases} x_1 \text{ pour } x_1 \geqslant x_2, \\ x_2 \text{ pour } x_2 \geqslant x_1; \end{cases}$$

$$\min\{x_1, x_2\} = \begin{cases} x_1 \text{ pour } x_2 \geqslant x_1, \\ x_2 \text{ pour } x_1 \geqslant x_2. \end{cases}$$

On appellera *algèbre booléenne du choix* un ensemble M de variables, muni des opérations inv, max, min. On appellera *formules de l'algèbre du choix* des expressions contenant un nombre fini de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sur lesquelles sont effectuées des opérations de choix. L'algèbre du choix étudie les méthodes d'établissement d'équivalences de la forme $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = B(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, où $A(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et $B(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ sont des formules de l'algèbre du choix.

La définition des opérations entraîne les équivalences:

involution

$$\bar{\bar{x}} = x; \tag{9.1}$$

commutativité

$$\max(x_1, x_2) = \max(x_2, x_1), \tag{9.2}$$

$$\min(x_1, x_2) = \min(x_2, x_1); \tag{9.3}$$

associativité

$$\max\{x_1, \max(x_2, x_3)\} = \max\{x_1, x_2, x_3\}, \tag{9.4}$$

$$\min\{x_1, \min(x_2, x_3)\} = \min\{x_1, x_2, x_3\}; \tag{9.5}$$

distributivité

$$\max\{x_1, \min(x_2, x_3)\} = \min\{\max(x_1, x_2), \max(x_1, x_3)\}, \tag{9.6}$$

$$\min\{x_1, \max(x_2, x_3)\} = \max\{\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3)\}; \tag{9.7}$$

propriété de de Morgan

$$\overline{\min(x_1, x_2)} = \max(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \tag{9.8}$$

$$\overline{\max(x_1, x_2)} = \min(\bar{x}_1, \bar{x}_2); \tag{9.9}$$

idempotence

$$\max(x, x) = x, \tag{9.10}$$

$$\min(x, x) = x; \tag{9.11}$$

neutralité des bornes

$$\max(x, q) = x, \tag{9.12}$$

$$\min(x, p) = x; \tag{9.13}$$

extrémalité des bornes

$$\max (x, p) = p, \qquad (9.14)$$

$$\min (x, q) = q. \qquad (9.15)$$

Les relations d'équivalence (9.1) à (9.15) permettent d'effectuer sur les formules booléennes des transformations qui les ramènent à une forme plus commode. L'équivalence de ces formules peut être établie à l'aide des relations (9.1) à (9.15) ou par une vérification directe à l'aide des tables dé choix. Prouvons à titre d'illustration l'équivalence (9.7):

$$\min \{x_1, \max (x_2, x_3)\} = \max \{\min (x_1, x_2), \min (x_1, x_3)\}$$

en utilisant la table de choix. Posons $y_1 = \min \{x_1, \max (x_2, x_3)\}$ et $y_2 = \max \{\min (x_1, x_2, \min (x_1, x_3)\}$.

Tableau 9.1

$<$	max (x_2, x_3)	y_1	min (x_1, x_2)	min (x_1, x_2)	y_2
$x_1 < x_2 < x_3$	x_3	x_1	x_1	x_1	x_1
$x_1 < x_3 < x_2$	x_2	x_1	x_1	x_1	x_1
$x_2 < x_1 < x_3$	x_3	x_1	x_2	x_1	x_1
$x_2 < x_3 < x_1$	x_3	x_3	x_2	x_3	x_3
$x_3 < x_1 < x_2$	x_2	x_1	x_1	x_3	x_1
$x_3 < x_2 < x_1$	x_2	x_2	x_2	x_3	x_2

Dans la première colonne on inscrit les permutations des variables x_1, x_2, x_3 dans l'ordre de croissance. En comparant les colonnes des valeurs de y_1 et y_2 on s'assure que (9.7) est vérifiée. Les colonnes des valeurs max (x_2, x_3), min (x_1, x_2), min (x_1, x_3) jouent un rôle secondaire : elles contiennent les résultats des opérations intermédiaires.

L'équivalence des formules peut souvent être établie à l'aide de relations de *dualité*. L'opération max est duale de l'opération min et inversement. Deux formules A et A^* sont *duales* si elles se déduisent l'une de l'autre par substitution de chaque opération à sa duale. L'équivalence de (9.8) et (9.9) entraîne que si $A(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et $A^*(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ sont duales, les formules $\overline{A(x_1, x_2, x_3, \ldots)}$ et $A^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots)$ sont équivalentes. De là il suit que si des formules A et B sont équivalentes, leurs duales A^* et B^* le seront également.

Toutes les opérations de choix s'expriment au moyen de l'addition algébrique et de la fonction module. Pour l'opération inv

cela découle de sa définition. Pour les opérations max et min, on a les relations suivantes qu'il est aisé d'établir

$$\min(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|],$$

$$\max(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|].$$

Les opérations de choix sont distributives relativement a l'addition et au produit ordinaires :

$$x_1 + \max(x_2, x_3) = \max\{(x_1 + x_2), (x_1 + x_3)\}, \quad (9.16)$$

$$\max(x_1 + x_2) + \max(x_3, x_4) =$$
$$= \max\{(x_1 + x_3), (x_2 + x_3), (x_1 + x_4), (x_2 + x_4)\}, \quad (9.17)$$

$$x_1 \max(x_2, x_3) = \max\{x_1x_2, x_1x_3\}. \quad (9.18)$$

L'équivalence des relations (9.16) à (9.18) reste en vigueur si l'on remplace l'opération max par sa duale min.

La réalisation des opérations de choix sur machine a été étudiée au § 10 du chapitre 2.

2. Prédicats. On appelle *prédicats* des fonctions logiques définies dans M. Un prédicat peut être fonction d'une ou de plusieurs variables. La particularité des prédicats en tant que fonctions logiques réside dans le fait que leur domaine de valeurs n'est composé que de deux éléments : deux nombres réels p et q, respectivement bornes inférieure et supérieure de M. Ceci permet de considérer les prédicats comme des variables de M et par conséquent de leur appliquer les opérations de choix inv, max, min. Dans la suite on désignera les prédicats par la lettre P.

Dans le cas le plus simple le prédicat $P(x)$ ne possède qu'un seul argument x. Il traduit alors une propriété de la variable x. Par exemple, « x est un nombre positif ». Ce prédicat peut s'écrire

$$P(x) = \begin{cases} p \text{ pour } x > 0, \\ q \text{ pour } x \leqslant 0. \end{cases}$$

L'ensemble des valeurs de x se trouve partagé en deux sous-ensembles. Le premier, qui est tel que $P(x) = p$, contient toutes les valeurs positives de x, le second toutes les autres valeurs.

Les prédicats les plus importants sont ceux à plusieurs variables. Ils peuvent définir une relation entre les variables, par exemple $x_1(t) < x_2(t)$; $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) < 0$, etc.

Considérons à titre d'exemple le prédicat

$$P(x_1, x_2) = \operatorname{sign}(x_1^2 + x_2^2 - R^2)$$

défini sur le rectangle $q \leqslant x_1 \leqslant p$, $q \leqslant x_2 \leqslant P$. On rappelle que

$$\text{sign}\, z = \begin{cases} 1 \text{ pour } z \geqslant 0, \\ -1 \text{ pour } z < 0. \end{cases}$$

La figure 9.1 représente le domaine rectangulaire de définition du prédicat et le cercle $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$ intérieur à ce domaine. On constate sans peine qu'en tous les points du disque, le prédicat prend la valeur

$$P(x_1, x_2) = -1.$$

Dans tous les autres points

$$P(x_1, x_2) = 1.$$

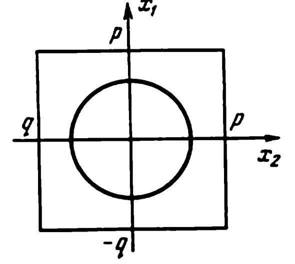


Fig. 9.1

Les prédicats servent à former les fonctions de pénalisation qui sont utilisées dans la programmation des calculateurs analogiques pour résoudre des problèmes de programmation mathématique (§ 4, chapitre 10) et des systèmes d'inégalités. Comme exemple de fonction de pénalisation pour le disque $x_1^2 + x_2^2 - R^2 \leqslant 0$ signalons la fonction

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - R^2)\, \text{sign}\, (x_1^2 + x_2^2 - R^2), \tag{9.19}$$

où le prédicat

$$\text{sign}\, (x_1^2 + x_2^2 - R^2) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_1^2 + x_2^2 - R^2 \leqslant 0, \\ 1 \text{ si } x_1^2 + x_2^2 - R^2 > 0. \end{cases}$$

De (9.19) il s'ensuit que la fonction de pénalisation n'est pas négative. Elle est nulle pour tous les couples de points (x_1, x_2) du disque $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$, en dehors de ce domaine elle prend des valeurs qui croissent avec l'éloignement du point (x_1, x_2) du domaine. Donc la « pénalisation » est proportionnelle à l'éloignement du point du domaine admissible.

La réalisation des prédicats sur machine s'effectue à l'aide d'un circuit de commande préprogrammé ou d'un relais sans contact. Le prédicat est une fonction discontinue à discontinuités de première espèce. On a déjà vu la réalisation de ces fonctions au § 4 du chapitre 8.

3. Lien entre l'algèbre logique et l'algèbre du choix. L'algèbre logique est contenue dans l'algèbre du choix. Pour s'en assurer il suffit d'extraire de l'ensemble M un sous-ensemble de prédicats M' et de considérer les opérations de choix sur M'. Les opérations de choix définies sur M' sont caractérisées par le fait que les variables initiales (les prédicats) ne prennent que deux valeurs : p ou q, et partant les résultats des opérations et des formules ne prendront

que l'une des valeurs, p ou q. Dans l'algèbre logique, à l'opération max correspond la conjonction, et à l'opération min, la disjonction. Toutes les équivalences (9.1) à (9.13) restent en vigueur dans l'algèbre logique. Les schémas de maximisation à diodes (qui laissent passer le plus grand des signaux d'entrée (voir fig. 2.29, *b*) réalisent la conjonction : on les appelle schémas *ET*. Le schéma de minimisation (qui laisse passer le plus petit des signaux d'entrée) (fig. 2.29, *d*) réalise la disjonction : on l'appelle schéma *OU*.

§ 2. Opérateurs d'affectation conditionnels et leur réalisation sur machine

1. Opérateur conditionnel de forme générale. La notion d'opérateur d'affectation conditionnel a été introduite dans les langages algorithmiques pour la programmation des calculatrices numériques. Dans le langage ALGOL-60 l'opérateur d'affectation conditionnel est de la forme

$$y := \textbf{if } B \textbf{ then } x \textbf{ else } z, \tag{9.20}$$

où B est une expression booléenne qui prend la valeur 1 ou 0 selon qu'elle est vraie ou fausse ; y une variable à laquelle on attribue les valeurs de la variable x ou de la variable z. L'opérateur conditionnel est désigné symboliquement par

$$y = \begin{cases} x \text{ si } B = 0, \\ z \text{ si } B = 1. \end{cases} \tag{9.21}$$

On rencontre les opérateurs d'affectation conditionnels dans la programmation des calculateurs analogiques lorsque le problème à résoudre conduit à un schéma de structure variable. Le rôle de la variable booléenne B incombe au prédicat $P(t)$. Dans ce cas l'opérateur peut s'écrire sous une forme analogue à (9.21) :

$$y(t) = \begin{cases} x(t) \text{ si } P(t) = p, \\ z(t) \text{ si } P(t) = q. \end{cases} \tag{9.22}$$

Il est aisé de représenter l'opérateur d'affectation (9.22) par des opérations de choix.

En effet,

$$y(t) = \max\{\min\{x(t), P(t)\}, \min\{z(t), \bar{P}(t)\}\} \tag{9.23}$$

ou encore

$$y(t) = \min\{\max\{x(t), \bar{P}(t)\}, \max\{z(t), P(t)\}\}. \tag{9.24}$$

Dans les deux cas $\bar{P}(t) = \text{inv } P(t) = -P(t)$.

La figure 9.2 représente le schéma qui réalise (9.23). Le schéma *a* est fonctionnel. Il lui correspond trois schémas de principe électriques *b*, *c*, *d*. Le schéma *b* réalise l'expression

$$u_y = \max\{\min(u_x, u_p, +E), \min(u_z, u_{-p}, +E), -E\} =$$
$$= \max\{\min(u_x, u_p), \min(u_z, u_{-p})\},$$

puisque $+E = |-E| > |u_p| = |u_{-p}|$. Le montage comporte six diodes, il n'est donc pas économique. Le plus économique est celui de la figure 9.2, *c*. Il réalise l'expression

$$u_y = \max\{\min(u_x, \alpha u_p), \min(u_z, \alpha u_{-p}), -E\},$$

où α est un coefficient positif constant inférieur à l'unité qui dépend des résistances utilisées. La réalisation de la dernière expression

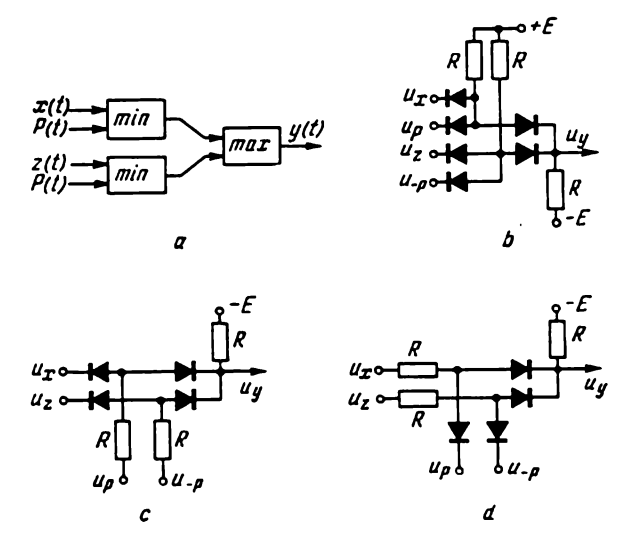


Fig. 9.2

nécessite le choix d'une échelle qui conserve la condition $|u_x| < |\alpha u_p|$. La figure 9.2, *d* représente un circuit dans lequel on a simplement modifié l'emplacement des résistances d'entrée et des diodes. Ce circuit réalise l'expression

$$u_y = \max\{\min(\alpha u_x, u_p), \min(\alpha u_z, u_{-p}), -E\}$$

qui demande aussi le choix d'une échelle convenable.

De façon analogue on construirait un circuit réalisant l'opérateur d'affectation d'après la relation (9.24).

2. Circuits de commutation. On appelle circuits de commutation (ou encore commutateurs) des circuits qui réalisent un cas particulier de l'opérateur d'affectation conditionnel :

$$y(t)=\begin{cases} x(t) \text{ si } P(t)=p, \\ 0 \quad \text{ si } P(t)=q. \end{cases}$$

Le circuit de commutation se déduit des circuits de la figure 9.2 par substitution de la constante 0 aux variables $z(t)$ et u_z. Il existe une très grande variété de circuits de commutation. Considérons quelques uns d'entre eux. Les expressions générales de l'opérateur d'affectation conditionnel (9.23) et (9.24) avec $z(t) = 0$ entraînent

$$y(t)=\begin{cases} \max\{0, \min\{x(t), P(t)\}\} \text{ pour } x(t)>0, \\ \min\{0, \max\{x(t), \bar{P}(t)\}\} \text{ pour } x(t)<0, \end{cases} \tag{9.25}$$

ou, moyennant des transformations équivalentes,

$$y(t)=\begin{cases} \min\{x(t), \max\{0, P(t)\}\} \text{ pour } x(t)>0, \\ \max\{x(t), \min\{0, \bar{P}(t)\}\} \text{ pour } x(t)<0. \end{cases} \tag{9.26}$$

Considérons d'abord l'expression (9.25). Le schéma fonctionnel qui lui correspond est représenté sur la figure 9.3, *a*. La branche supérieure réalise $y(t) = \max\{0, \min\{x(t), P(t)\}\}$, la branche

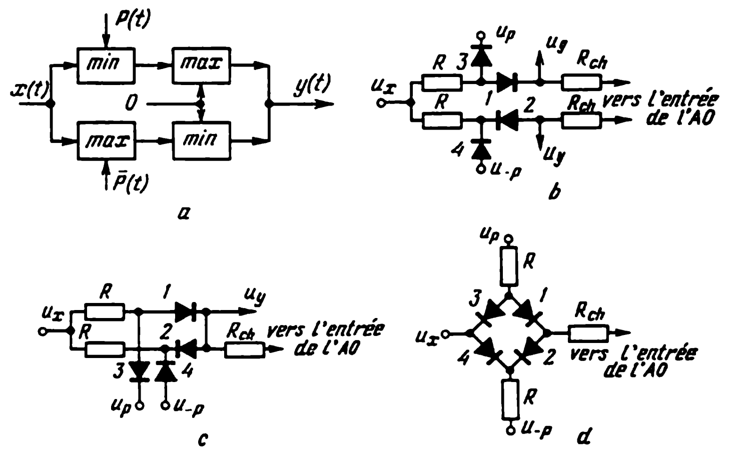


Fig. 9.3

inférieure $y(t) = \min\{0, \max\{x(t), \bar{P}(t)\}\}$. Les sorties des deux branches sont reliées entre elles. Les circuits électriques de chaque branche du schéma 9.3, *a* sont représentés sur la figure 9.3, *b*. Les sorties des circuits électriques sont désignées par u_y.

Le rôle de la résistance de charge R_{ch} est assumé par la résistance d'entrée de l'amplificateur d'échelle à laquelle on branche un circuit de commutation. On rappelle que l'entrée de l'amplificateur d'échelle est à la masse, donc c'est à travers la résistance R_{ch} que la constante 0 est appliquée dans le circuit de sélection. Les bornes identiques des deux chaînes électriques peuvent être reliées de manière à obtenir le circuit de commutation dit en série de la figure 9.3, *c*. Nous nous sommes permis de réunir les bornes identiques, car la variable $x(t)$ ne peut être simultanément positive et négative. Donc seule une des branches est en service. Les diodes *1*, *2*, *3*, *4* et les tensions hétéropolaires u_p et u_{-p} excluent toute influence électrique mutuelle des branches. Le commutateur en série de la figure 9.3, *c* peut être transformé en un commutateur en série du type pont, représenté sur la figure 9.3, *d*. Ce circuit se déduit du circuit de la figure 9.3, *c* par permutation des diodes *3* et *4* et des résistances R. Cette permutation n'a aucun effet sur la logique du circuit en vertu de la commutativité des opérations min $\{x(t), P(t)\}$ et max $\{x(t), \bar{P}(t)\}$.

Si l'on cherche maintenant à réaliser les expressions (9.26), on obtient un commutateur en parallèle. Son montage est composé

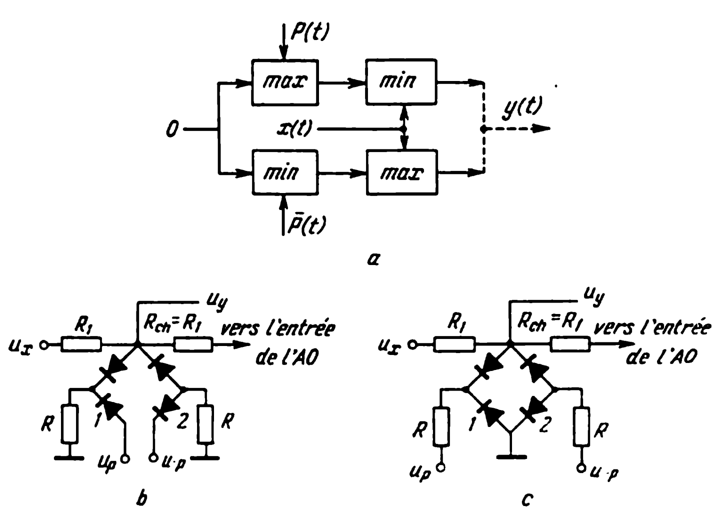


Fig. 9.4

comme celui du commutateur en série de deux branches qui sont représentées sur la figure 9.4, *a*. Les sorties des branches sont réunies (lignes en pointillé) car les deux branches ne peuvent être simultanément en état de marche. La figure 9.4, *b* et *c*, représente deux circuits électriques logiquement équivalents à celui de la figure 9.4, *a*. La seule différence réside dans les modes d'application des variables

u_p, u_{-p} et 0. Dans le circuit 9.4, *b* les variables u_p et u_{-p} accèdent par les diodes *1* et *2* et le 0 par les résistances, dans le circuit 9.4, *c*, c'est l'inverse, les variables u_p et u_{-p} arrivent par les résistances et le 0 par les diodes *1* et *2*.

§ 3. Quelques applications de l'algèbre booléenne du choix

On décrira ici le fonctionnement d'un certain nombre de réseaux illustrant l'application de l'algèbre booléenne du choix.

1. Circuits de commutation 1) Circuit de commutation I. La figure 9.5, *a* représente le schéma fonctionnel d'un

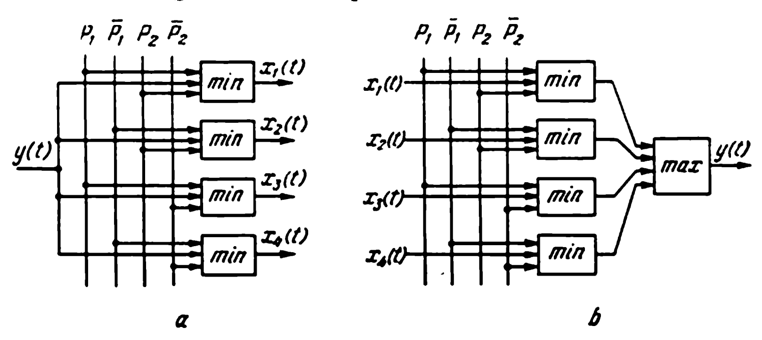


Fig. 9.5

circuit de commutation à l'entrée duquel sont appliquées la variable $y(t)$ et deux prédicats $P_1(t)$ et $P_2(t)$ avec leurs inverses $\bar{P}_1(t)$ et $\bar{P}_2(t)$. Montrons que la variable $y(t)$ est délivrée à l'une seulement des sorties, en fonction des valeurs prises par les prédicats. En effet, le schéma permet d'établir aisément que la variable $x_1(t)$, par exemple, s'exprime à l'aide de l'opérateur d'affectation

$$x_1(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } P_1(t) = P_2(t) = p, \\ q & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

De façon analogue

$$x_2(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } \bar{P}_1(t) = P_2(t) = p, \\ q & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

et ainsi de suite.

2) Circuit de commutation II. La figure 9.5, *b* représente le schéma fonctionnel du circuit de commutation à l'entree duquel sont appliqués quatre variables arbitraires $x_1(t)$, $x_2(t)$,

$x_3(t)$, $x_4(t)$ et deux prédicats $P_1(t)$ et $P_2(t)$ avec leurs inverses $\overline{P}_1(t)$, $\overline{P}_2(t)$. Le schéma délivre une seule variable $y(t)$ à la sortie. De la figure 9.5, *b* il s'ensuit que

$$y(t) = \max\{\min\{x_1(t), P_1(t), P_2(t)\}, \min\{x_2(t), \overline{P}_1(t), P_2(t)\}, \min\{x_3(t), P_1(t), \overline{P}_2(t)\}, \min\{x_4(t), \overline{P}_1, \overline{P}_2\}\}. \quad (9.27)$$

La dernière expression est une généralisation de l'opération d'affectation (9.22). En effet, (9.27) peut encore s'écrire

$$y(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{si } P_1(t) = P_2(t) = p, \\ x_2(t) & \text{si } \overline{P}_1(t) = P_2(t) = p, \\ x_3(t) & \text{si } P_1(t) = \overline{P}_2(t) = p, \\ x_4(t) & \text{si } \overline{P}_1(t) = \overline{P}_2(t) = p. \end{cases}$$

Donc la variable $y(t)$ est égale à $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ ou $x_4(t)$ selon la valeur prise par les prédicats $P_1(t)$ et $P_2(t)$.

Si l'on compare le fonctionnement des circuits de commutation I et II, on constate qu'ils ont des vocations opposées. Le premier laisse passer une variable d'entrée dans l'une des quatre directions possibles. Le second sélectionne l'une des quatre variables qu'il délivre à la sortie. On généralise sans peine de tels circuits de commutation à un plus grand nombre de variables. Ainsi pour monter un circuit de commutation I à huit directions, il suffit d'ajouter aux prédicats $P_1(t)$ et $P_2(t)$ un troisième $P_3(t)$. D'une façon générale, si l'on dispose de n prédicats $P_1(t)$, $P_2(t)$, . . ., $P_n(t)$ et de leurs inverses, on peut construire : a) un circuit de commutation I à 2^n directions ; b) un circuit de commutation II sélectionnant une fonction parmi 2^n fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . ., $x_{2^n}(t)$.

2. Circuits de mémorisation. Les circuits de mémorisation des valeurs des variables mettent en jeu des intégrateurs dont les variables d'entrée contiennent des prédicats spécialement choisis. L'élément de mémorisation de l'intégrateur est un condensateur de contre-réaction (cf. fig. 2.10, *a*).

Considérons le principe général d'organisation du circuit de mémorisation. Soit à mémoriser la valeur de la variable $x(t)$ à l'instant t^*.

Déterminons tout d'abord les variables qui doivent accéder à l'entrée du circuit de mémorisation. Elles sont au nombre de deux. La première $x'(t)$ permet de générer la fonction $x(t)$ dont la valeur à l'instant t^* est à mémoriser. La seconde est le prédicat $P(t)$, qui définit la valeur de l'argument t^* :

$$P(t) = \begin{cases} p & \text{si } t \leqslant t^*, \\ q & \text{si } t > t^*. \end{cases}$$

Le prédicat $P(t)$ et la variable $x'(t)$ définissent l'opérateur d'affectation conditionnel :

$$y(t)=\begin{cases} -x'(t) & \text{si } P(t)=p, \text{ i.e. si } t\leqslant t^*, \\ 0 & \text{si } P(t)=q, \text{ i.e. si } t>t^*. \end{cases} \tag{9.28}$$

L'opérateur (9.28) nous est familier. Il est réalisé par les circuits de commutation du § 2, chapitre 9. On remarque aisément que si on applique la variable $y(t)$ à l'entrée de l'intégrateur, au bout d'un instant t^* on obtient la constante $x(t^*)$ à la sortie. Pour le prouver il suffit d'intégrer la variable $y(t)$. L'intégrale de $y(t)$, au signe et à la condition initiale $x(0) = x_0$ près, sera égale à

$$\int_0^t y(t)\,dt=\int_0^{t^*} x'(t)\,dt+\int_{t^*}^t 0\cdot dt=x(t^*)$$

pour tous les $t\geqslant t^*$.

Le schéma d'un circuit de mémorisation doit mettre en jeu deux opérateurs : un intégrateur associé à un circuit de commutation à son entrée. Dans de nombreux cas particuliers il est parfois possible de simplifier le schéma.

1) M é m o r i s a t i o n d ' u n e x t r é m u m l o c a l. Supposons qu'une variable $x(t)$ varie comme l'indique la figure 9.6, *a*

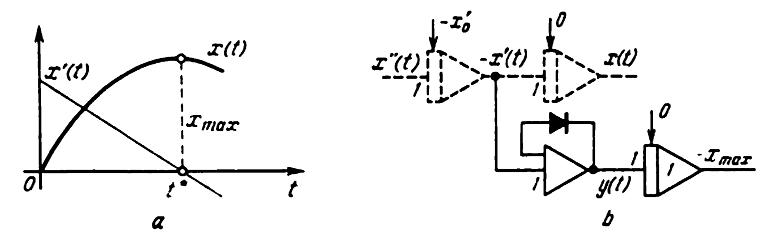


Fig. 9.6

La variable $x(t)$ est générée par un circuit mettant en jeu deux intégrateurs en série. Ce circuit est représenté en pointillé sur la figure 9.6, *b*. On demande de construire un schéma qui mémorise la valeur $x_{\max} = x(t^*)$. Le montage est représenté en traits pleins sur la même figure.

Montrons qu'au bout d'un instant t^*, l'intégrateur délivre la constante $-x_{\max} = -x(t^*)$. On se servira à cet effet de l'expression suivante de la variable $y(t)$:

$$y(t)=\begin{cases} x'(t) & \text{si } x'(t)>0, \\ 0 & \text{si } x'(t)\leqslant 0. \end{cases}$$

Si l'on introduit maintenant le prédicat

$$\operatorname{sign} x'(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } x'(t) > 0, \\ 0 \text{ si } x'(t) \leqslant 0, \end{cases}$$

la variable $y(t)$ peut encore s'écrire: $y(t) = x'(t) \operatorname{sign}[x'(t)]$. L'intégrateur délivre l'intégrale de cette variable:

$$-\int_0^t y(t)\,dt = -\int_0^t x'(t) \operatorname{sign}[x'(t)]\,dt =$$

$$= -\int_0^{t^*} x'(t)\,dt - \int_{t^*}^t 0 \cdot dt = -x(t^*)$$

pour tous les $t \geqslant t^*$.

Nous venons de voir un circuit de mémorisation d'un maximum local. On construirait de même un circuit de mémorisation d'un minimum local.

2) Mémorisation de la date d'un événement. Par *événement* on entendra ici le passage d'une variable par

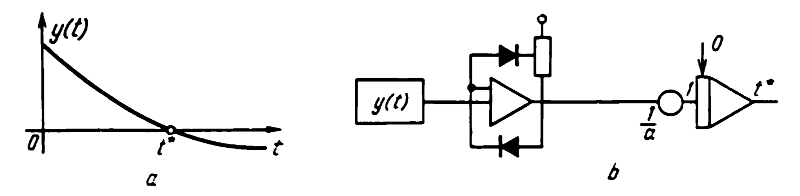


Fig. 9.7

zéro. La figure 9.7, *a* représente une variable $y(t)$ qui passe par zéro à la date t^*. Le problème est de mémoriser t^*.

Le schéma fonctionnel du circuit de mémorisation de t^* est celui de la figure 9.7, *b*. Il met en jeu un opérateur qui délivre $y(t)$, un limiteur d'amplitude qui génère le prédicat $-a \operatorname{sign}|y(t)|$ et un intégrateur. On remarque facilement que la variable de sortie de l'intégrateur sera égale à t^* à l'instant t^* et aux instants suivants. En effet,

$$\frac{1}{a}\int_0^t a \operatorname{sign}[y(t)]\,dt = \int_0^{t^*} 1 \cdot dt + \int_{t^*}^t 0 \cdot dt = t^*.$$

Le schéma que nous venons de voir admet une importante généralisation. Voyons-la. Supposons que le processus étudié est caracté-

risé par deux variables, $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Supposons par ailleurs que ce processus suit son meilleur cours si les variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ évitent un certain domaine. On supposera que ce domaine est le disque $x_1^2 + x_2^2 - R^2 \leqslant 0$ (cf. fig. 9.1). On admet que le processus s'écarte de sa trajectoire optimale et que le point représentatif pénètre quelquefois dans le domaine. On demande de calculer le temps global de séjour du point représentatif dans le domaine. Ce temps pourrait servir de critère d'appréciation du déroulement du processus. On obtient ce temps à l'aide du schéma 9.7, *b* sous réserve que la variable $y(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) - R^2$. Il est évident qu'à l'entrée de l'opérateur générant $y(t)$ il est nécessaire d'appliquer les variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du processus.

3. Génération de la fonction « médiane». On appelle médiane de trois variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ la fonction

$$\operatorname{med}\{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} = \\ = \begin{cases} x_1(t) \text{ si } x_2(t) \leqslant x_1(t) \leqslant x_3(t) \text{ ou } x_3(t) \leqslant x_1(t) \leqslant x_2(t), \\ x_2(t) \text{ si } x_1(t) \leqslant x_2(t) \leqslant x_3(t) \text{ ou } x_3(t) \leqslant x_2(t) \leqslant x_1(t), \\ x_3(t) \text{ si } x_1(t) \leqslant x_3(t) \leqslant x_2(t) \text{ ou } x_2(t) \leqslant x_3(t) \leqslant x_1(t). \end{cases}$$

La figure 9.8 représente trois variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et leur médiane en gras. On remarque que la médiane est confondue avec l'une des variables à des dates différentes.

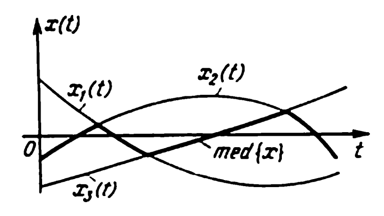


Fig. 9.8

On définirait de même la médiane de cinq, sept et, généralement, d'un nombre impair de variables. Nous nous limiterons pour notre part à trois variables.

La fonction « médiane » peut être appliquée à la sélection du plus probable des résultats obtenus simultanément par la machine. Supposons qu'on ait trois montages identiques qui génèrent simultanément la solution d'un même problème avec les résultats $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. Dans le cas idéal ces trois variables devraient être confondues. Mais cette coïncidence n'a pas lieu pour diverses causes d'erreurs. On admet que la médiane fournit le résultat le plus probable.

La médiane est exprimée de façon relativement simple par les opérations de choix :

$$\begin{aligned}\text{med}\,\{x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)\} =\\ = \max\{&\min\{x_1(t),\ x_2(t)\},\\ &\min\{x_1(t),\ x_3(t)\},\\ &\min\{x_2(t),\ x_3(t)\}\}\end{aligned} \tag{9.29}$$

ou

$$\begin{aligned}\text{med}\,\{x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)\} =\\ = \min\{&\max\{x_1(t),\ x_2(t)\},\\ &\max\{x_1(t),\ x_3(t)\},\\ &\max\{x_2(t),\ x_3(t)\}\}.\end{aligned} \tag{9.30}$$

La médiane peut être représentée à l'aide de l'addition, la soustraction et des opérations de choix :

$$\begin{aligned}\text{med}\,\{x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)\} =\\ = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) -\\ -\max\{x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)\} -\\ -\min\{x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)\}.\end{aligned}$$

4. **Génération de solutions d'équations différentielles à structure variable.** L'algèbre booléenne du choix trouve une application dans la programmation des calculateurs analogiques lors de la génération de solutions d'équations différentielles à structure variable. Illustrons cela sur l'exemple du problème à frontière mobile.

On rencontre ce type de problème lorsqu'on étudie le transfert d'une substance (masse, chaleur, énergie) dans un milieu. Lors du transfert il se produit, dans le milieu, des transformations de phase définies par l'intensité de ce transfert. Le milieu primitivement homogène commence à se scinder en zones de divers états de phase. Les surfaces de séparation sont appelées frontières. Les frontières ne sont fixes ni dans l'espace ni dans le temps. Un exemple simple est la congélation de l'eau des lacs. Le lac est divisé verticalement en deux zones : une phase solide (la glace) et une phase liquide (l'eau qui n'a pas encore gelée). L'épaisseur de la glace est une grandeur variable qui dépend de la température de l'air.

Le mécanisme de transfert de la substance dans les diverses phases est différent. C'est pourquoi dans chaque phase il est décrit par des équations différentielles dont la structure varie à la traversée de la frontière.

Pour simplifier on considérera un transfert unidimensionnel dans un milieu à deux phases. En supposant que les équations différen-

tielles aux dérivées partielles décrivant le transfert sont approchées par un système d'équations différentielles ordinaires, on obtient le système d'équations

$$x_j' = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n \text{ pour } x_j \leqslant A$$

ou

$$x_j' = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n \text{ pour } x_j > A.$$

Ici n est l'ordre du système d'équations ordinaires ; A une constante fixe pour le milieu donné, définissant les conditions de la transformation de phase. Les systèmes d'équations peuvent être représentés et réalisés sur machine à l'aide d'opérateurs d'affectation conditionnels de la forme

$$x_j' = \max\{\min\{f_j, P_j\}, \min\{\varphi_j, \bar{P}_j\}\},$$

où le prédicat

$$P_j(x_j) = \begin{cases} p \text{ si } A - x_j \geqslant 0, \\ q \text{ si } A - x_j < 0. \end{cases}$$

§ 4. Exercices

1. Montrer les équivalences.

1) $\max\{\min(x_1, x_2), \min(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\} =$

$$= \min\{\max(x_1, \bar{x}_2), \max(\bar{x}_1, x_2)\} =$$

$$= \max\{\min(x_1, x_2), \overline{\max(x_1, x_2)}\} =$$

$$= \min\{\max(x_1, x_2), \overline{\min(x_1, x_2)}\}.$$

2) $\max\{\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3), \min(x_2, x_3)\} =$

$$= \min\{\max(x_1, x_2), \max(x_1, x_3), \max(x_2, x_3)\}.$$

2. Construire le schéma fonctionnel et le circuit électrique d'attribution du signe de la variable $s(t)$ à la variable $x(t)$.

I n d i c a t i o n : pour la variable $y(t) = |x(t)| \operatorname{sign}[s(t)]$ prouver l'équivalence

$$y(t) = \max\{\min\{x(t), P(t)\}, \min\{-x(t), P(t)\}, \min\{x(t), -x(t), -P(t)\}\},$$

où le prédicat

$$P(t) = \begin{cases} p \text{ si } s(t) > 0, \\ q \text{ si } s(t) < 0. \end{cases}$$

3. Montrer que le signe du produit de deux variables x_1 et x_2 peut être formé à l'aide de l'expression $\max\{\min(z_1, z_2), \min(\bar{z}_1, \bar{z}_2)\}$, où $z_1 = \operatorname{sign} x_1$ et $z_2 = \operatorname{sign} x_2$. Construire les schémas fonctionnels et les circuits électriques.

4. Montrer que si on applique les sorties du schéma de la figure 9.5, *a* aux entrées de même nom du schéma de la figure 9.5, *b* on obtient un montage qui réalise la transformation identique. La transformation des variables d'entrée sera-t-elle identique si la sortie du schéma de la figure 9.5, *b* est appliquée sur l'entrée de même nom du schéma de la figure 9.5, *a*?

5. Construire les schémas fonctionnels et les circuits électriques de génération de la médiane d'après les formules (9.29) et (9.30).

6. Construire le schéma fonctionnel et le circuit électrique de génération de la fonction $x(t)$ d'après les fonctions données $a(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ sachant que

$$b_1(t) = \max\{a(t), x(t)\},$$
$$b_2(t) = \min\{a(t), x(t)\}.$$

Indication: montrer que

$$x(t) = \max\{\min\{b_1(t), P(t)\}, \min\{b_2(t), \bar{P}(t)\}\},$$

où le prédicat

$$P(t) = \begin{cases} p & \text{si} \quad b_1(t) - a(t) > 0, \\ q & \text{si} \quad b_1(t) - a(t) < 0. \end{cases}$$

7. Décrire avec des opérations de choix le fonctionnement du schéma de la figure 2.24 qui résout l'équation implicite $F(x, y) = 0$ par rapport à la variable y. Se servir de l'expression obtenue pour construire l'équivalent sans contact du schéma fonctionnel de la figure 2.24.

CHAPITRE 10

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES PAR LA MÉTHODE DU GRADIENT

§ 1. Equations différentielles de plus rapide pente

La méthode du gradient permet de ramener la résolution de nombreux problèmes de mathématiques à la recherche d'un extrémum local de fonctions de plusieurs variables, moyennant la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires. Cette importante particularité de la méthode du gradient la rend attrayante dans la programmation des calculateurs analogiques.

1. Déduction des équations différentielles. Soit à trouver un extrémum local d'une fonction de plusieurs variables ou fonctionnelle $J(\boldsymbol{x})$, où $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Dans toute la suite, on supposera que l'extrémum local $\boldsymbol{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ existe et est unique dans le domaine de définition de la fonctionnelle $J(\boldsymbol{x})$.

Ce problème est résolu si l'on indique une méthode de construction d'une trajectoire $\boldsymbol{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$, issue d'un point arbitraire $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \{x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}\}$ du domaine de définition de $J(\boldsymbol{x})$, qui amène le point représentatif en $\boldsymbol{x}^*$.

Pour fixer les idées on cherchera le minimum de $J(\boldsymbol{x})$. Dans le domaine de définition on peut tracer une infinité de trajectoires passant par le point arbitraire $\boldsymbol{x}_0$ et le point cherché $\boldsymbol{x}^*$. Choisissons la meilleure de ces trajectoires et composons l'équation différentielle déterminante qui lui correspond. Par meilleure trajectoire on entendra celle pour laquelle dJ/dt, i.e. la vitesse de décroissance de la fonctionnelle, est la plus grande. L'expression de la vitesse de variation de la fonctionnelle

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}$$

est le produit scalaire du gradient

$$\operatorname{grad} J(\boldsymbol{x}) = \left\{\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial x_n}\right\}$$

par le vecteur vitesse du point représentatif

$$\frac{\partial x}{dt}=\left\{\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right\}.$$

Tout produit scalaire prend sa valeur absolue maximale lorsque les facteurs sont colinéaires. Ce qui implique la proportionnalité des composantes correspondantes des vecteurs, i.e.

$$dx_j/dt = -\rho\cdot\partial J/\partial x_j, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

ou en écriture vectorielle

$$dx/dt = -\rho \operatorname{grad} J(x),$$

où ρ est un nombre positif arbitraire jouant le rôle de coefficient de proportionnalité des composantes. Si à la dernière expression on ajoute à titre de conditions initiales les coordonnées du point initial x_0, on obtient les équations différentielles déterminantes cherchées sous forme d'un problème de Cauchy en écriture vectorielle :

$$\frac{dx}{dt} = -\rho \operatorname{grad} J(x), \quad x(0) = x_0 \qquad (10.1)$$

ou en écriture scalaire

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho\frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad x_j(0)=x_{j0}, \quad j=1, 2, \ldots, n. \qquad (10.2)$$

Les équations différentielles (10.1), (10.2) sont appelées *équations différentielles de plus rapide descente.*

Dans les cas où l'on cherche le maximum de la fonctionnelle $J(x)$ il est naturel d'exiger la croissance maximale de $J(x)$ sur la trajectoire, ce qui conduit aux *équations différentielles de plus rapide montée*, qui diffèrent de (10.1) et (10.2) par le seul signe du coefficient :

$$\frac{dx}{dt} = \rho \operatorname{grad} J(x), \quad x(0) = x_0 \qquad (10.3)$$

ou

$$\frac{dx_j}{dt} = \rho\frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad x_j(0)=x_{j0}, \quad j=1, 2, \ldots, n. \qquad (10.4)$$

La minimisation de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ est interprétée géométriquement sur la figure 10.1. La surface représentée sur le dessin correspond à la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ dans l'espace. Sur le plan x_1ox_2 sont représentées les lignes de niveau de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ = const et la trajectoire du point représentatif $x_1(t)$, $x_2(t)$ qui commence en x_0 et s'achève en x^*. A chaque instant cette trajectoire est orthogonale aux lignes de niveau.

Les équations différentielles de plus rapide descente (montée) sont souvent utilisées sous une autre forme générale :

$$\frac{dx}{dt} = \pm \rho(t) \operatorname{grad} J(x); \quad x(0) = x_0 \tag{10.5}$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = \pm \rho(t, x) \operatorname{grad} J(x); \quad x(0) = x_0. \tag{10.6}$$

Dans la première équation $\rho(t)$ est une fonction positive, dans la seconde $\rho(t, x)$ est une fonction positive qui dépend également de la position du point mobile. Comme on a une vaste latitude dans le choix de ces fonctions, on obtient un grand nombre d'équations différentielles de descente parmi lesquelles on sélectionne celles qui assurent le mouvement voulu et qui sont facilement réalisables sur la machine.

Quelquefois au lieu d'une fonction $\rho(t, x)$ on introduit une matrice de fonctions $\|\rho(t, x)\|$ dans l'équation (10.6).

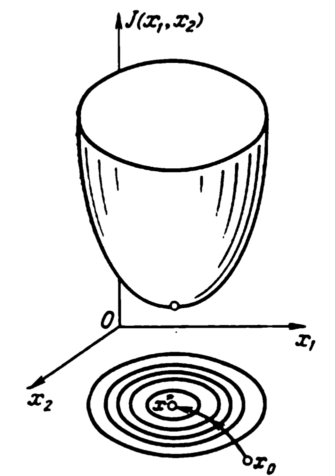


Fig. 10.1

Dans le cas le plus simple c'est la matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \rho_1(t, x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2(t, x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n(t, x) \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

où tous les $\rho_j(t, x) > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

En toute rigueur l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -[\rho(t, x)] \operatorname{grad} J(x) \tag{10.8}$$

ne peut plus être appelée équation de plus rapide descente en raison de la violation de la condition de colinéarité des vecteurs $\frac{dx}{dt}$ et grad $J(x)$ qui résulte de l'introduction de la matrice $\|\rho(t, x)\|$.

Exemple. *Trouver le minimum local de la fonctionnelle*

$$J(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2; \quad a_1 > 0, \ a_2 > 0.$$

Cette fonctionnelle atteint visiblement son minimum, qui est nul au point $x_1 = x_2 = 0$. Nous passerons outre ce fait évident

et nous commencerons le mouvement à partir d'un point x_{10}, x_{20}. Nous allons considérer deux procédés de minimisation.

1. En vertu de (10.2) l'équation différentielle de plus rapide descente sera

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\rho\frac{\partial J}{\partial x_1} = -2\rho a_1 x_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\rho\frac{\partial J}{\partial x_2} = -2\rho a_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Les solutions

$$x_1(t) = x_{10}\exp(-2\rho a_1 t), \quad x_2(t) = x_{20}\exp(-2\rho a_2 t)$$

de ces équations tendent asymptotiquement vers l'extrémum $x_1 = x_2 = 0$ cherché lorsque $t \to \infty$.

2. Prenons l'équation différentielle de descente sous la forme (10.8). A cet effet posons

$$\rho_1(x_1, t) = (1 + x_1^2)(1 + t)\rho; \quad \rho_2(x_2, t) = (1 + x_2^2)(1 + t)\rho,$$

où ρ est une constante positive. Les équations différentielles de descente s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2\rho a_1(1 + x_1^2)(1 + t)x_1, \quad x_1(0) = x_{10}; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2\rho a_2(1 + x_2^2)(1 + t)x_2, \quad x_2(0) = x_{20}. \end{aligned}$$

Les variables sont facilement séparables et la solution du système est

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{x_{10}^2\exp\left[-4\rho a_1\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right]}{1 + x_{10}^2\left[1 - \exp\left[-4\rho a_1\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right]\right]}},$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{x_{20}^2\exp\left[-4\rho a_2\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right]}{1 + x_{20}^2\left[1 - \exp\left[-4\rho a_2\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right]\right]}}.$$

On constate que la solution tend asymptotiquement vers $x_1 = x_2 = 0$.

En comparant les résultats des deux procédés on remarque que les équations différentielles du second assurent une plus grande vitesse de minimisation de la fonctionnelle par la présence des facteurs $(1 + x_1^2)$, $(1 + x_2^2)$ et $(1 + t)$.

2. Stabilité des équations de descente. Dans l'exemple que nous venons de voir les solutions des équations différentielles de descente étaient asymptotiquement stables. Cela est dû au fait qu'en déduisant ces équations on a exigé la décroissance de la fonctionnelle $J(x)$ le long de la trajectoire.

La stabilité des solutions des équations différentielles de descente (10.2) s'établit sous la forme générale à l'aide de la deuxième méthode de Liapounov. Cette méthode qui nous dispense d'étudier la solution sous sa forme analytique explicite s'applique à tout système d'équations différentielles. Elle se fonde sur le théorème suivant.

Si à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x)$$

on peut associer une fonction différentiable $V(x)$, *appelée fonction de Liapounov, vérifiant au voisinage de l'origine des coordonnées les conditions*:

1) $V(x) \geqslant 0$ et $V(x) = 0$ *seulement pour* $x = 0$, *i.e. la fonction possède un minimum strict à l'origine des coordonnés*;

2) $\frac{dV}{dt} = \operatorname{grad} V \cdot F(t, x) \leqslant 0$,

alors la solution $x(t)$ *est stable.*

Si de plus $\frac{dV}{dt} < 0$, *alors la solution* $x(t) = 0$ *est asymptotiquement stable.*

Nous ne ferons pas la démonstration ici, nous n'en ébaucherons que l'idée dans le cas de la stabilité asymptotique.

Supposons que $x(0) \neq 0$. Alors $V(x) > 0$. Comme $\frac{dV}{dt} < 0$, $V(x)$ décroît sur t et tend vers 0 lorsque $t \to \infty$. Mais si $V(x) = 0$, alors $x = 0$. Donc la solution est asymptotiquement stable.

Dans les équations différentielles de descente, la fonction de Liapounov $V(x)$ n'est autre que la fonctionnelle à minimiser $J(x)$. Pour l'équation de descente (10.2) il existe toujours une vitesse non positive de variation de la fonctionnelle le long de la trajectoire lorsque $t \to \infty$, puisque

$$\frac{dJ}{dt} = -\rho(t) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \operatorname{grad}^2 J \leqslant 0.$$

De façon analogue, pour les équations diférentielles de descente de forme plus générale

$$\frac{dx}{dt} = -[\rho(t, x)] \operatorname{grad}^2 J,$$

où $[\rho(t, x)]$ est la matrice diagonale (10.7), on a

$$\frac{dJ}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \rho_j(t, x) \left(\frac{\partial J}{\partial x_j}\right)^2 \leqslant 0.$$

Quelquefois on a à chercher les extrémums locaux de fonctionnelles $J(x, t)$ dépendant du temps. Ces fonctionnelles sont dites *non stationnaires* contrairement aux fonctionnelles *stationnaires* $J(x)$.

Dans la programmation des calculateurs analogiques on a souvent affaire aux fonctionnelles non stationnaires. Géométriquement la dépendance de la fonctionnelle par rapport au temps se traduit par une variation de la surface qui la définit. Ce qui entraîne un déplacement des extrémums locaux. Le point représentatif correspondant au système d'équations différentielles de descente (montée) poursuit l'extrémum et l'atteint dans les cas favorables. Si le point représentatif ne rejoint pas l'extrémum on dit que la poursuite est *instable*.

Trouvons les conditions pour lesquelles la fonctionnelle à minimiser $J(x, t)$ décroît (i.e. $dJ/dt < 0$) sur la trajectoire définie par les équations de descente (10.5)

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t)\frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

La dérivée totale de $J(x, t)$ par rapport à t

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial J}{\partial t}, \tag{10.10}$$

compte tenu de (10.5), sera égale à

$$\frac{dJ}{dt} = -\rho(t)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial J}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial J}{\partial t},$$

où $\sum_{j=1}^{n}(\partial J/\partial x_j)^2$ est une quantité positive qui s'annule uniquement aux extrémums locaux.

La fonctionnelle $J(x, t)$ décroîtra sur la trajectoire si

$$\rho(t)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial J}{\partial x_j}\right)^2 > \left|\frac{\partial J}{\partial t}\right|. \tag{10.11}$$

Mais cette condition est toujours violée dès que le point représentatif se trouve au voisinage de l'extrémum où la quantité $\sum_{j=1}^{n}(\partial J/\partial x_j)^2$ est suffisamment petite. La dimension de ce voisinage est définie par les fonctions $\rho(t)$ et $\partial J/\partial t$ et en particulier elle peut tendre asymptotiquement vers zéro. Dans ce cas on dit que l'optimisation de la fonctionnelle $J(x, t)$ est *asymptotiquement stable*.

Pour illustrer l'influence de $\rho(t)$ sur la stabilité de l'optimisation, cherchons indépendamment de (10.11) les conditions pour lesquelles sera stable la recherche du minimum x_1^*, x_2^* de la fonctionnelle

$$J(x, t) = [x_1 - \varphi_1(t)]^2 + [x_2 - \varphi_2(t)]^2. \tag{10.12}$$

S'agissant des fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$, on supposera qu'elles sont différentiables et que leurs modules $|\varphi_1(t)|$, $|\varphi_2(t)|$ sont croissants.

L'extrémum de la fonctionnelle (10.12) est évident:

$$x_1^* = \varphi_1(t), \quad x_2^* = \varphi_2(t).$$

Assurons-nous que si $\rho(t)$ est dûment choisi les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = -\rho(t)\frac{\partial J}{\partial x_1} = -2\rho(t)[x_1 - \varphi_1(t)], \tag{10.13}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\rho(t)\frac{\partial J}{\partial x_2} = -2\rho(t)[x_2 - \varphi_2(t)] \tag{10.14}$$

seront asymptotiquement équivalentes à $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$, i.e.

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi_1(t) - x_1(t)] = 0;$$

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi_2(t) - x_2(t)] = 0.$$

Les équations (10.13) et (10.14) sont similaires, on n'étudiera donc que la première d'entre elles.

Introduisons la nouvelle variable

$$\delta_1(t) = \varphi_1(t) - x_1(t).$$

Exprimant $x_1(t)$ en fonction de $\varphi_1(t)$ et $\delta_1(t)$ et portant ensuite dans (10.13), on obtient

$$\delta'(t) + 2\rho(t)\delta(t) = \varphi_1'(t). \tag{10.15}$$

On aura trouvé les conditions d'équivalence asymptotique de $x_1(t)$ et $\varphi_1(t)$ lorsqu'on indiquera un moyen de choisir $\rho(t)$ en fonction de $\varphi_1(t)$ tel que

$$\lim_{t\to\infty}\delta_1(t) = 0.$$

La solution générale de l'équation (10.15) sera de la forme

$$\delta_1(t) = \exp\left[-2\int\rho(t)\,dt\right]\left\{\int\varphi_1'(t)\exp\left[2\int\rho(t)\,dt\right]dt + C\right\}.$$

L'expression de la limite cherchée peut être simplifiée

$$\lim_{t\to\infty}\delta_1(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\int\varphi_1'(t)\exp\left[2\int\rho(t)\,dt\right]dt}{\exp\left[2\int\rho(t)\,dt\right]} = \lim_{t\to\infty}\frac{\varphi_1'(t)}{2\rho(t)}.$$

La dernière limite est nulle si seulement l'ordre de croissance de la fonction $\rho(t)$ est supérieur à celui de la fonction $\varphi_1'(t)$.

Donc pour l'équation (10.12) on peut toujours trouver d'après $\varphi_1(t)$ une fonction $\rho(t)$ telle que la convergence du processus soit assurée. On peut par exemple prendre $\rho(t) = t\varphi_1'(t)$.

§ 2. Méthode des fonctions implicites

La méthode des fonctions implicites a été développée pour les équations finies du § 9, chapitre 2, et au § 4 du chapitre 5 pour les équations différentielles non résolues en la dérivée supérieure. Désormais on a la possibilité de la justifier.

La méthode des fonctions implicites est au fond une méthode de gradient qui implique la minimisation d'une fonctionnelle spécialement choisie, moyennant la réalisation des solutions d'équations différentielles de descente. Montrons cela pour les équations différentielles et les équations finies.

1. Equation finie. On demande de résoudre l'équation finie

$$F(y, x) = 0 \tag{10.16}$$

par rapport à la variable y sous l'hypothèse $F_y'(y, x) \neq 0$, le vecteur $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ étant donné. Ce problème se résout par minimisation de la fonctionnelle différentiable positive

$$J(y) = \frac{1}{2} F^2(y, x), \tag{10.17}$$

dont le minimum est confondu avec la racine cherchée de l'équation (10.16). En vertu de (10.2) cherchons pour (10.17) l'équation différentielle de descente $\frac{dy}{dt} = -\rho(y, x)\, F(y, x)\, F_y'(y, x)$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$. La latitude de choix de la fonction positive $\rho(y, x)$ permet de poser $\rho(y, x) = K/|F_y'(y, x)|$, où $K \geqslant 4 \cdot 10^4$ est le gain de l'amplificateur opérationnel. Compte tenu de cela on obtient l'équation différentielle de descente (2.17) (§ 9, chapitre 2) sous forme du problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = -KF(y, x)\,\mathrm{sign}\,[F_y'(y, x)], \quad y(0) = y_0. \tag{10.18}$$

Pour condition initiale on a pris $y_0 = 0$ au § 9 du chapitre 2, ce qui est compatible avec la stabilité asymptotique de la solution de l'équation (10.18). En effet, la fonctionnelle (10.17) étant différentiable, positive, de vitesse de variation négative à x = const, soit

$$\Big(\frac{dJ}{dt} = F(y, x)\, F_y'(y, x)\frac{dy}{dt} = \\ = -KF^2(y, x)\, F_y'(y, x)\,\mathrm{sign}\,[F_y'(y, x)] = \\ = -KF^2(y, x)\,|F_y'(y, x)| < 0,$$

les conditions du théorème de Liapounov sur la stabilité asymptotique sont remplies. Si le vecteur $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ est fonction du temps, la fonctionnelle (10.17) admettra un minimum sous réserve que

$$KF^2(y, x)\,|F'_y(y, x)| > \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}\right|.$$

2. Equation différentielle. Soit à résoudre l'équation différentielle

$$F(x^n, x, t) = 0 \qquad (10.19)$$

par rapport à la dérivée supérieure avec la condition initiale $x(0) = x_0$, où $x = \{x^{(n-1)}, \ldots, x\}$ et respectivement $x_0 = \{x_0^{(n-1)}, \ldots \ldots, x_0\}$. Comme dans le cas de l'équation finie, déterminons $x^{(n)}$ en minimisant la fonctionnelle

$$J(x^{(n)}) = \frac{1}{2} F^2(x^{(n)}, x, t) \qquad (10.20)$$

par génération de la solution de l'équation différentielle de descente $\frac{dx^{(n)}}{dt} = -\rho(x^{(n)}, x)\, F(x^{(n)}, x, t)\, F'_{x^{(n)}}(x^{(n)}, x, t)$ avec les conditions initiales $x^{(n)}(0) = x_0^{(n)}$, $x(0) = x_0$, où $x_0^{(n)}$ est un nombre arbitrairement choisi. En prenant la fonction positive sous la forme $\rho(x^{(n)}, x) = K/|F'_{x^{(n)}}(x^{(n)}, x, t)|$, on obtient une équation différentielle d'ordre $n+1$, résolue par rapport à la dérivée supérieure:

$$x_1^{n+1} = -KF(x_1^{(n)}, x_1, t)\,\mathrm{sign}\,[F'_{x^{(n)}}(x_1^{(n)}, x_1, t)] \qquad (10.21)$$

avec les conditions initiales $x_1^{(n)} = x_0^{(n)}$, $x_1(0) = x_0$.

L'équation différentielle de descente (10.21) est réalisée sur la machine à la place de l'équation initiale. L'équation (10.21) est résolue par rapport à la dérivée supérieure, mais son ordre est supérieur de un à celui de l'équation (10.19). Les équations (10.19) et (10.21) ne sont pas équivalentes, donc leurs solutions $x(t)$ et $x_1(t)$ sont distinctes et l'écart $\delta(t) = x(t) - x_1(t)$ constitue l'erreur entraînée par la substitution de l'équation (10.21) à l'équation (10.19). Dans les cas favorables $\lim_{t\to\infty} \delta(t) = 0$ et $x_1(t)$, $x(t)$ sont asymptotiquement équivalentes. Mais ceci implique nécessairement la stabilité de la solution de l'équation différentielle (10.21). La fonctionnelle (10.20) est positive, différentiable, mais pas stationnaire. Pour que sa minimisation soit stable, il faut en vertu du théorème de Liapounov que soit négative sa vitesse de variation:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x_1^{(n)}} x_1^{(n+1)} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial x_1^j} x^{(j+1)} + \frac{\partial J}{\partial t} < 0$$

ou, compte tenu de (10.21),

$$KF^2(x_1^{(n)}, x_1, t) \,|\, F'_{x^{(n)}}(x_1^{(n)}, x_1, t) > \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial x_1^{(j)}} x_1^{(j+1)} + \frac{\partial J}{\partial t} \right|. \quad (10.22)$$

De (10.22) il s'ensuit que la stabilité de (10.21) dépend de la forme de l'équation différentielle initiale (10.19).

La minimisation de la fonctionnelle (10.20) peut être conduite de telle sorte que l'équation différentielle de descente obtenue soit du même ordre que l'équation différentielle initiale (10.19). Pour cela il faut minimiser la fonctionnelle non pas sur la variable $x^{(n)}$ mais sur la variable $x^{(n-1)}$, ce qui donne

$$x_2^{(n)} = -KF(x_2^{(n)}, x_2, t)\operatorname{sign}[F'_{x^{n-1}}(x_2^{(n)}, x_2, t)], \quad x_2(0) = x_0. \quad (10.23)$$

Les conditions de stabilité de la solution de cette équation sont plus strictes que celles de l'équation (10.21).

3. Analyse du fonctionnement de certains schémas résolvant des équations implicites. Il y a intérêt à s'arrêter sur l'analyse du fonctionnement de quelques schémas auxquels nous avons eu affaire pendant la réalisation des expressions implicites. Penchons-nous tout d'abord sur les schémas de division (cf. § 9, chapitre 2), puis sur celui de la moyenne courante (cf. § 4, chapitre 5).

Pour calculer le quotient $z = x/y$, où x et y sont des constantes on passe à l'équation équivalente implicite

$$x - zy = 0.$$

Si l'on se sert de la fonctionnelle (10.17), on obtient en vertu de (10.2) et (10.18) les équations différentielles suivantes pour la détermination du quotient:

$$\frac{dz}{dt} = \rho[x - zy]\,y, \qquad z(0) = z_0; \quad (10.24)$$

$$\frac{dz}{dt} = \rho[x - zy]\operatorname{sign} y, \quad z(0) = z_0. \quad (10.25)$$

Résolvons les équations (10.24) et (10.25) en supposant d'abord que x et y sont constants. Les variables sont facilement séparables dans (10.24) et

$$\frac{dz}{zy^2 - xy} = -\rho\,dt,$$

d'où

$$z(t) = \frac{x}{y} + \left(z_0 - \frac{x}{y}\right)\exp(-\rho y^2 t). \quad (10.26)$$

La solution $z(t)$ est asymptotiquement stable indépendamment de la condition initiale z_0 et du signe de la variable y. Le circuit corres-

pondant à l'équation (10.24) met en jeu deux multiplieurs (fig. 10.2, *a*). La valeur exacte de la variable de sortie $-z(t)$ à x et y constants est délivrée avec un retard de $4/(\rho y^2)$ s.

Cherchons la solution de l'équation (10.25). D'habitude, pour simplifier le schéma fonctionnel, on admet que dans cette équation y

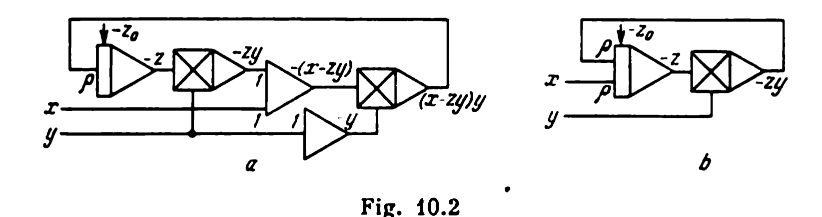


Fig. 10.2

a toujours le même signe. Supposons $y > 0$. En séparant les variables on obtient

$$\frac{dz}{(zy-x)} = -\rho\, dt,$$

d'où

$$z(t) = \frac{x}{y} + \left(z_0 - \frac{x}{y}\right) \exp(-\rho y t).$$

La solution $z(t)$ est asymptotiquement stable indépendamment de la condition initiale z_0. Si la variable y change de signe, i.e. devient négative, la solution est instable et l'argument de l'exponentielle devient positif.

Le schéma fonctionnel correspondant à cette équation est relativement simple et met en jeu un seul multiplieur (fig. 10.2, *b*). Ceci explique le très large emploi de ce schéma dans la résolution de problèmes sur machine. Comme dans le circuit de division, la variable de sortie est délivrée avec un retard environ égal à $4/\rho y$ s.

Dans le cas le plus général où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions arbitraires de t, $(y \neq 0)$, la variable $z(t)$ des équations (10.24) et (10.25) est asymptotiquement équivalente au quotient cherché $\frac{x(t)}{y(t)}$.

En effet, la solution générale de (10.24) est

$$z(t) = \exp\left(-\rho \int y^2\, dt\right) \left\{\rho \int xy \exp\left(\rho \int y^2\, dt\right) + C\right\}$$

et

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\rho \int xy \exp\left(\rho \int y^2\, dt\right) dt + C}{\exp\left(\rho \int y^2\, dt\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\rho x y}{\rho y^2} = \frac{x}{y}.$$

De façon analogue, la solution générale de (10.25) ($y > 0$) est

$$z(t) = \exp\left(-\rho \int y\,dt\right)\left\{\rho \int x \exp\left(\rho \int y\,dt\right) dt + C\right\}$$

et

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\rho \int x \exp\left(\rho \int y\,dt\right) dt + C}{\exp\left(\rho \int y\,dt\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\rho x}{\rho y} = \frac{x}{y}.$$

Analysons maintenant les erreurs du schéma de la moyenne courante $m(t)$ de la fonction $x(t)$ (§ 4, chapitre 5) en réalisant la solution de l'équation différentielle

$$tm'(t) + m(t) - x(t) = 0 \tag{10.27}$$

qui n'est pas résolue par rapport à la dérivée supérieure $m'(t)$. On connaît l'expression exacte de la moyenne courante :

$$m^*(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(t)\,dt.$$

L'existence d'une expression exacte de la moyenne courante permet de mettre facilement en évidence le comportement des erreurs de la machine pour les divers types de fonctions étudiées.

Arrêtons-nous sur deux cas de génération approchée de la solution de l'équation (10.27) par la méthode de plus rapide descente.

Dans le premier cas, en vertu de (10.21), on résoudra l'équation (10.27) par rapport à la variable $m'(t)$, ce qui donne l'équation différentielle du second ordre :

$$m_1''(t) + \rho\,[tm_1'(t) + m_1(t) - x(t)] = 0. \tag{10.28}$$

Nous devons dégager ici l'équivalence asymptotique de $m^*(t)$ et $m_1(t)$, en d'autres termes évaluer la limite de la fonction $\delta(t)$ pour les divers types de fonctions $x(t)$ moyennisées :

$$\lim_{t\to\infty} \delta(t) = \lim_{t\to\infty} [m^*(t) - m_1(t)].$$

Dans le second cas, en vertu de (10.23), on résoudra l'équation (10.27) par rapport à $m(t)$, ce qui conduit à l'équation différentielle du premier ordre

$$m_2'(t) + \rho\,[tm_2'(t) + m_2(t) - x(t)] = 0. \tag{10.29}$$

Comme dans le premier cas, il nous faut mettre en évidence l'équivalence asymptotique de $m^*(t)$ et $m_2(t)$ par une analyse de la limite de l'erreur $\varepsilon(t) = m^*(t) - m_2(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to\infty} [m^*(t) - m_2(t)].$$

Revenons au premier cas.

Cherchons d'abord l'équation différentielle pour $\delta(t)$. En portant dans l'équation (10.28) l'expression de $m_1(t)$ en fonction de $\delta(t)$ et $x(t)$, on obtient, toutes transformations faites, l'équation différentielle linéaire non homogène du second ordre

$$\delta''(t)+\rho t\delta'(t)+\rho\delta(t)=-\frac{2}{t^3}\int_0^t x(t)\,dt+2\,\frac{x(t)}{t^2}-\frac{x'(t)}{t}. \qquad (10.30)$$

Pour fonctions moyennisées $x(t)$ prenons les fonctions

$$\alpha\cdot 1(t);\ \alpha t;\ \alpha t^2;\ \alpha t^3, \qquad (10.31)$$

qui se distinguent entre elles par leur ordre de croissance. Ici $\alpha \neq 0$ est un nombre arbitraire. Le second membre de l'équation (10.30) sera respectivement égal pour ces fonctions

$$0;\ 0;\ -\frac{2}{3}\alpha;\ -\frac{3}{2}\alpha t.$$

L'établissement de l'équivalence asymptotique de $m(t)$ et $m_1(t)$ lorsqu'on moyennise les fonctions $\alpha\cdot 1(t)$ et αt se ramène à la recherche et à l'étude du comportement pour de grands t de la solution générale de l'équation homogène :

$$\delta''(t)+\rho t\,\delta'(t)+\rho(t)=0. \qquad (10.32)$$

Une solution particulière immédiate est $\delta_1(t)=\exp(-\rho t^2/2)$. La solution générale de l'équation homogène est donnée par la formule

$$\delta_0(t)=\delta_1(t)\left\{\int\frac{C_1\exp\left(-\rho\int t\,dt\right)}{\delta_1^2(t)}\,dt+C_2\right\}, \qquad (10.33)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

En portant $\delta_1(t)$ dans la solution générale on obtient

$$\delta_0(t)=C_1\frac{\int\exp(\rho t^2/2)\,dt}{\exp(\rho t^2/2)}+C_2\exp\left(-\rho\frac{t^2}{2}\right).$$

On s'assure sans peine que $m(t)$ et $m_1(t)$ sont asymptotiquement équivalents :

$$\lim_{t\to\infty}\delta_0(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{C_1\int\exp(\rho t^2/2)\,dt}{\exp(\rho t^2/2)}=\lim_{t\to\infty}\frac{C_1\exp(\rho t^2/2)}{t\rho\exp(\rho t^2/2)}=0.$$

Si l'on moyennise une fonction d'ordre de croissance αt^2, on établit l'équivalence asymptotique de $m_1(t)$ et $m(t)$ en étudiant la solution de l'équation différentielle non homogène

$$\delta''(t)+\rho t\cdot\delta'(t)+\rho\delta(t)=-2\alpha/3. \qquad (10.34)$$

Une solution particulière immédiate est $\delta_2(t) = -2\alpha/(3\rho)$. La solution générale de l'équation non homogène (10.34) sera

$$\delta(t) = -\frac{2\alpha}{3\rho} + \delta_0(t), \tag{10.35}$$

où $\delta_0(t)$ est la solution générale (10.33) de l'équation homogène (10.32). De (10.35) il s'ensuit que

$$\lim_{t\to\infty} \delta(t) = -\frac{2\alpha}{3\rho}.$$

Ceci traduit le fait que $m_1(t)$ et $m(t)$ sont asymptotiquement inéquivalents. La génération de la fonction $m_1(t)$ est en retard sur celle de $m(t)$, ce qui introduit une erreur stationnaire numériquement égale à $-(2\alpha)/(3\rho)$. Il est impossible d'éliminer entièrement cette erreur, on peut seulement la rendre assez petite en augmentant le nombre ρ. Pour établir l'équivalence asymptotique de $m_1(t)$ et $m(t)$ lorsqu'on moyennise des fonctions d'ordre de croissance αt^3, il faut étudier la solution de l'équation non homogène

$$\delta''(t) + \rho t\delta'(t) + \rho\delta(t) = -3\alpha t/2$$

pour $t \to \infty$. Sa solution générale est simple à trouver. Elle est égale à

$$\delta(t) = -\frac{3\alpha}{4\rho} t + \delta_0(t), \tag{10.36}$$

où $\delta_0(t)$ est la solution générale (10.33) de l'équation homogène (10.32). De (10.36) il résulte que

$$\lim_{t\to\infty} \delta(t) = -\infty.$$

En d'autres termes, pour les grands t, $m_1(t)$ est systématiquement en retard sur $m(t)$.

Considérons maintenant le deuxième cas. Résolvons l'équation (10.27) par rapport à la dérivée $m_2'(t)$:

$$m_2'(t) + \frac{\rho}{1+\rho t} m_2(t) = \frac{\rho}{1+\rho t} x(t).$$

La solution analytique s'obtient sans peine

$$m_2(t) = \frac{1}{t+1/\rho} \int_0^t x(t)\,dt.$$

De prime abord il semble que pour les grands ρ les fonctions $m_2(t)$ et $m^*(t)$ prennent les mêmes valeurs et l'étude de l'équivalence asymptotique de ces fonctions n'a pas de sens. Mais, dans la réalité, la situation est autre. La moyennisation sur l'équation (10.29) est

plus compliquée que sur l'équation (10.28). Prouvons-le. L'erreur de la moyennisation est :

$$\varepsilon(t) = m^*(t) - m_2(t) = \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1/\rho}\right] \int_0^t x(t)\,dt,$$

ou

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{t+\rho t^2} \int_0^t x(t)\,dt,$$

ce qui entraîne pour la fonction à moyenniser $x(t) = \alpha t$ l'erreur asymptotique constante

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha t^2}{2(t+\rho t^2)} = \frac{\alpha}{2\rho}.$$

On rappelle qu'en opérant sur l'équation (10.28) on a obtenu une moyenne exacte pour cette fonction.

§ 3. Résolution de systèmes d'équations

Dans le cas le plus général, la résolution d'un système quelconque d'équations linéaires ou non linéaires peut être envisagée comme un cas particulier de la résolution d'un système de fonctions implicitement données.

Soit donné le système de n équations à $n + m$ variables

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= 0 \end{aligned} \tag{10.37}$$

ou, en écriture vectorielle,

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0. \tag{10.38}$$

Le système (10.37) définit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme des fonctions implicites des variables données $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Il est standard que l'existence de ces fonctions implicites implique la non-nullité du jacobien du système (10.37) :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dans la suite nous supposerons que cette condition est réalisée dans tout le domaine de définition des variables.

Si les variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont données constantes, alors (10.37) se transforme en un système ordinaire de n équations à n inconnues que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{10.39}$$

Mais très souvent, surtout dans les problèmes pratiques de commande, les variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ne sont pas des constantes mais des fonctions connues du temps qui caractérisent le comportement de l'objet (phénomène) commandé. Ces fonctions accèdent au calculateur analogique du système de commande automatique. La tâche du calculateur analogique consiste ici à générer les fonctions $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$ et à les transmettre aux organes de commande de l'objet. Donc, incorporé dans un système de commande automatique, le calculateur analogique poursuit constamment la solution du système (10.37).

Dans la suite nous envisagerons essentiellement des systèmes du type (10.39). Cependant les méthodes de résolution de (10.39), développées plus bas, pourront très souvent être appliquées sans difficulté au système plus général (10.37).

1. Résolution de systèmes d'équations de forme générale. Dans la programmation des calculateurs analogiques on s'arrange toujours pour ramener le problème initial à un système équivalent d'équations différentielles. Dans le cas (10.39), il existe plusieurs façons d'effectuer ce passage. Mais l'essentiel c'est que la solution du système d'équations différentielles tende asymptotiquement vers celle du système (10.39). Dans le cas contraire le système d'équations différentielles n'est pas équivalent à (10.39).

Les méthodes les plus efficaces de résolution de (10.39) du point de vue de la stabilité des équations différentielles équivalentes obtenues sont les méthodes du gradient de minimisation de la fonctionnelle

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i^2(x) \tag{10.40}$$

ou

$$J(x) = \sum_{i=1}^{n} |F_i(x)|. \tag{10.41}$$

Les équations différentielles correspondantes de plus rapide descente sont :

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.42}$$

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \operatorname{sign} F_i(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.43}$$

Les expressions (10.42) et (10.43) sont souvent difficiles à réaliser sur la machine en raison du grand nombre de termes des fonctionnelles (10.40) et (10.41).

Il existe une autre méthode qui s'apparente aux méthodes du gradient et qui minimise non pas une fonctionnelle complexe du type (10.41), mais n fonctionnelles simples

$$J_i(x) = \frac{1}{2} F_i^2(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.44}$$

ou

$$J_i(x) = | F_i(x) |, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.45}$$

La fonctionnelle $J_j(x)$ est minimisée sur la variable x_j. On obtient le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho_j(t) \frac{\partial J_j}{\partial x_j} = -\rho_j(t) \frac{\partial F_j}{\partial x_j} F_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.46}$$

ou

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} = -\rho_j(t) \frac{\partial J_j}{\partial x_j} = -\rho_j(t) \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \operatorname{sign} F_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.47}$$

Les équations différentielles (10.46) et (10.47) sont bien plus faciles à réaliser sur la machine que (10.42) et (10.43). L'inconvénient c'est que les nouvelles équations peuvent posséder des solutions instables. Elucidons la cause de cette instabilité.

En minimisant chaque i-ème fonctionnelle, on résout l'équation implicite $F_i(x) = 0$ du système (10.39) par rapport à la variable x_i. Ce faisant on néglige totalement l'influence (la sensibilité) de toutes les autres variables x_j, $j \neq i$, sur l'équation $F_i(x) = 0$. L'erreur $\varepsilon_i = F_i(x)$ qui résulte de la minimisation peut varier faiblement pour de grandes variations de x_i et fortement pour de petites variations de certaines autres variables x_j, $j \neq i$. Ceci fait apparaître des solutions instables ou des oscillations parasites. On peut s'en assurer de façon plus formelle en étudiant la vitesse de variation de la fonctionnelle $J_i(x)$.

Il est standard que la stabilité des solutions de (10.46) ou de (10.47) implique que $dJ_i/dt < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Estimons les facteurs qui influent sur le signe de la vitesse de variation de la fonctionnelle $J_i(x)$. Dans le cas général la vitesse peut s'écrire

$$\frac{dJ_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \rho_j(t) \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \frac{\partial J_j}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ou encore

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\rho_i(t) \left(\frac{\partial J_i}{\partial x_i}\right)^2 - \\ -\sum_{j \neq i}^{n} \rho_j(t) \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \frac{\partial J_j}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.48}$$

On voit que le signe de dJ_i/dt est indéfini. Tout dépend donc des termes figurant sous le signe somme dans (10.48). Mais dans le cas particulier où le système (10.39) est tel que

$$\rho_i(t) \left(\frac{\partial J_i}{\partial x_i}\right)^2 > \left| \sum_{j \neq i}^{n} \rho_j(t) \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \frac{\partial J_j}{\partial x_j} \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.49}$$

les solutions du système d'équations différentielles (10.46) et (10.47) tendent asymptotiquement vers la solution de (10.39). Les expressions $\partial J_j/\partial x_j$ sont proportionnelles aux dérivées partielles $\partial F_j/\partial x_j$. Donc, s'il est possible, on a intérêt à résoudre la j-ème équation $F_j(x) = 0$ du système (10.39) par rapport à la variable x_k qui maximise la dérivée partielle $\partial F_j/\partial x_k$. Par exemple, on résoudra la première équation $F_1(x) = 0$ par rapport à x_2 si $\partial F_1/\partial x_2 > \partial F_1/\partial x_j$ pour tous les $j \neq 2$. Signalons que cette condition ne garantit pas toujours le succès.

Il existe encore une méthode de réduction de la résolution du système (10.39) à celle d'un système d'équations différentielles. Expliquons-en le principe sur un exemple simple. Soit à résoudre l'équation $x = \exp(-x)$. Mettons-la sous une forme implicite

$$-x + \exp(-x) = 0 \tag{10.50}$$

et pour la résoudre sur la machine remplaçons-la par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -x + \exp(-x). \tag{10.51}$$

Expliquons les raisons du passage de (10.50) à (10.51). Si la solution de l'équation différentielle (10.51), vérifiant une condition initiale $x(0) = x_0$ arbitrairement choisie, tend asymptotique-

ment vers une constante x^*, cette constante n'est autre que la racine cherchée de l'équation (10.50). En effet, la dérivée dx/dt tend vers zéro, et partant, l'équation différentielle (10.51) se transforme en une équation finie $-x + \exp(-x) = 0$. Le principal inconvénient de cette méthode c'est que dans le cas général il n'existe *a priori* aucune raison d'escompter une stabilité asymptotique des équations différentielles ainsi obtenues. En effet, même dans notre cas simple il aurait suffi d'écrire l'équation (10.50) sous la forme $x - \exp(-x) = 0$ pour déboucher aussitôt sur l'équation différentielle $dx/dt = x - \exp(-x)$ dont la solution est instable.

Appliquée au système (10.39), cette méthode conduit au système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = \pm F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (10.52)$$

Les indices des variables $x_i(t)$ et des équations $F_j(x) = 0$ ont été pris expressément distincts pour souligner qu'ils sont à choisir autant que les signes des seconds membres des équations (10.52). Le choix des indices et des signes des seconds membres s'effectue au moyen de générations d'essai des solutions du système (10.52) parmi lesquelles on prend celles qui sont stables. Le nombre d'essais est de l'ordre de $2n!$, donc un grand nombre d'entre eux peuvent être mauvais.

La dernière méthode peut être singulièrement améliorée si le système (10.37) subit quelques transformations préalables. Dans de nombreux problèmes relevant de la commande automatique, le système initial (10.37) est préalablement multiplié à gauche par l'inverse de son jacobien. On obtient alors l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} F(x, y(t)), \qquad (10.53)$$

où $(\partial F/\partial x)$ est le jacobien du système (10.37).

Dans les problèmes de poursuite automatique des racines du système (10.37), cette transformation décompose l'équation vectorielle (10.53) en n équations différentielles linéaires pratiquement indépendantes l'une de l'autre. Montrons-le sur l'exemple d'un processus stationnaire de poursuite des racines. Dans un tel processus le vecteur erreur $\varepsilon = F(x, y(t))$ est suffisamment petit et peut être représenté approximativement par les deux premiers termes de la série de Taylor

$$\varepsilon = F(x, y(t)) \approx F[x^*, y(t)] + (\partial F/\partial x)\,\Delta x + \ldots, \qquad (10.54)$$

où $\Delta x = x(t) - x^*(t)$ est l'écart entre la valeur exacte et la valeur délivrée par la machine.

Comme $F[x^*, y(t)] = 0$, en portant (10.54) dans (10.53) on obtient

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)[x(t) - x^*(t)]$$

ou

$$dx/dt = -E[x(t) - x^*(t)], \tag{10.55}$$

où E est la matrice unité.

Nous venons donc de montrer qu'en régime stationnaire de poursuite des racines du système (10.37), l'équation (10.53) s'est effectivement scindée en un système d'équations différentielles stables indépendantes l'une de l'autre. Mais lorsque le vecteur erreur $\Delta x(t)$ est encore suffisamment grand (c'est le cas aux périodes initiales non stationnaires de poursuite) les processus décrits par (10.53) peuvent se distinguer par une forte dépendance de certaines variables par rapport à d'autres, i.e. de $x_j(t)$ par rapport à $x_i(t)$ et l'équation (10.55) n'a naturellement pas lieu. Cette interdépendance des variables pour les grands $\Delta x(t)$ fait apparaître des oscillations au début de la poursuite.

L'équation différentielle (10.53) est intéressante sous un autre angle. C'est l'analogue continue de la *méthode itérative de Newton* de résolution numérique de systèmes d'équations non linéaires.

2. Résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires. Le système d'équations algébriques linéaires noté scalairement

$$\begin{aligned} F_1(x) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 = 0, \\ F_2(x) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n - b_n = 0 \end{aligned} \tag{10.56}$$

ou vectoriellement

$$F(x) = Ax - b = 0, \tag{10.57}$$

est le cas particulier le plus simple du système (10.39). Donc, toutes les méthodes de passage de (10.39) aux systèmes d'équations différentielles équivalentes, developpées auparavant, valent pour le système (10.56).

A première vue il ne semble pas nécessaire de passer à des équations différentielles équivalentes pour résoudre le système d'équations algébriques linéaires (10.56). Il semble même que la résolution sur machine du système (10.56) ne mette en jeu que des sommateurs et des inverseurs : les premiers en nombre n, le nombre des équations, les seconds en quantité égale à celle des coefficients négatifs a_{ij}. Ceci étant, le premier sommateur réalise la première équation $F_1(x) = 0$ par rapport à la variable x_1 ; le second l'équation $F_2(x) = 0$

par rapport à x_2, etc. Malheureusement il s'avère que la méthode décrite ne présente aucun intérêt pratique et dans le cas général ne conduit pas au résultat escompté. La raison en est que les sommateurs délivrent la somme approximativement, et comme nous l'avons souligné au § 1, chapitre 3, la variable de sortie du sommateur dépend de la dérivée de la variable de sortie par rapport au temps. Donc cette méthode génère en fait les solutions d'un système d'équations différentielles à petits paramètres inconnus. Ces solutions sont souvent instables et caractérisées par de rapides variations des variables machine. Il est pratiquement impossible de contrôler la stabilité des solutions et *a fortiori* de modifier les paramètres des équations différentielles pour assurer la stabilité. La substitution d'un système d'équations différentielles équivalentes au système d'équations algébriques change radicalement les choses. La réalisation des solutions du système d'équations différentielles équivalentes n'élimine pas bien sûr les petits paramètres des sommateurs, elle en atténue l'effet et ce d'autant plus fortement que la solution du système d'équations différentielles équivalentes est lentement générée. Ceci est confirmé empiriquement, et pour nombre de systèmes d'équations algébriques, démontré rigoureusement.

Voyons plus en détail les principales méthodes de passage du système algébrique linéaire (10.56) aux systèmes d'équations différentielles équivalentes. La méthode la plus universelle est fondée sur la minimisation de la fonctionnelle

$$J(x) = {}^1/_2 (Ax - b)^{\mathrm{T}} (Ax - b). \tag{10.58}$$

La fonctionnelle (10.58) est l'écriture vectorielle de (10.40). Le symbole « T » désigne la transposition. La fonctionnelle possède un minimum nul qui correspond à la solution du système initial d'équations. D'après l'expression (10.58) on trouve facilement l'équation différentielle de descente, équivalente au système (10.57):

$$dx/dt = -\rho \operatorname{grad} J(x),$$

où

$$\operatorname{grad} J(x) = {}^1/_2 [A^{\mathrm{T}} (Ax - b) + (Ax - b)^{\mathrm{T}} A] = A^{\mathrm{T}} (Ax - b).$$

En définitive on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -\rho [A^{\mathrm{T}} Ax - A^{\mathrm{T}} b]. \tag{10.59}$$

Cette équation admet toujours une solution $x(t)$ asymptotiquement stable. La multiplication du système initial (10.57) par la matrice transposée A^{T} est gênante par les gros calculs qu'elle risque d'entraîner.

Les méthodes du gradient appliquées aux composantes de la fonction $J(x)$, i.e. fondées sur la minimisation de la fonction $J_i(x) = |F_i(x)|$ ou $J_i(x) = 1/2\, F_i^2(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, n'impliquent pas de calculs préalables, mais elles risquent de conduire à un système instable d'équations différentielles.

Penchons-nous tout d'abord sur la résolution du système d'équations (10.56) moyennant une minimisation de fonctionnelles de la forme $J_i(x) = |F_i(x)|$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Il lui correspond le système d'équations différentielles de descente

$$dx_j/dt = -\rho_j a_{jj} \operatorname{sign} F_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.60}$$

où $\rho_j > 0$ est un nombre arbitraire. En particulier, si $\rho_j = \frac{1}{|a_{jj}|}$, on obtient le système d'équations suivant:

$$dx_j/dt = -\operatorname{sign} a_{jj} F_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{10.61}$$

qui est facile à réaliser sur la machine.

La stabilité des solutions des systèmes d'équations différentielles (10.60) et (10.61) est définie par les propriétés de la matrice A du système (10.56). Les conditions de stabilité sont relativement simples à établir si l'on trouve des relations auxquelles devront satisfaire les éléments de la matrice A pour que la vitesse de variation de toutes les fonctions à minimiser soit toujours négative, i.e. $dJ_i/dt < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

La vitesse de variation de la fonctionnelle J_i

$$\frac{dJ_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{sign} F_i(x) \frac{dx_j}{dt} \tag{10.62}$$

compte tenu des équations (10.61) sera

$$dJ_i/dt = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{sign}\,[a_{jj} F_i(x) F_j(x)]; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Mettant en facteur le seul terme défini positif $a_{ii} \operatorname{sign}\,[a_{ii} F_i^2(x)]$ et exigeant la négativité de la dernière expression

$$-a_{ii} \operatorname{sign}\,[a_{ii} F_i^2(x)] - \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij} \operatorname{sign}\,[a_{jj} F_j(x) F_i(x)] < 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

on obtient les conditions suffisantes de stabilité asymptotique des solutions du système (10.61):

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.63}$$

Donc si la matrice du système (10.56) est à diagonale dominante au sens de (10.63), les solutions du système (10.61) tendront asymptotiquement vers celles du système d'équations algébriques initial (10.56).

Les conditions de stabilité des solutions du système d'équations différentielles (10.60) sont différentes, mais ici aussi on exige la prépondérance des termes diagonaux de la matrice. Pour nous en assurer, transcrivons l'expression (10.62) en tenant compte de (10.60) et en supposant que tous les $\rho_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jj} \operatorname{sign}[F_j(x) F_i(x)], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Les dernières expressions seront toujours négatives si

$$a_{ii}^2 > \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}a_{jj}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.64}$$

La minimisation de la fonctionnelle $J_i(x) = \frac{1}{2} F_i^2(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ fournit la variante du système d'équations différentielles la plus facilement réalisable. On obtient les équations différentielles de descente

$$dx_j/dt = -\rho_j a_{jj} F_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

qui pour $\rho_j = \frac{\lambda_j}{|a_{jj}|}$, où tous les $\lambda_j > 0$, se transforment en le système d'équations différentielles

$$dx_j/dt = -\lambda_j F_j(x) \operatorname{sign} a_{jj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.65}$$

Si les nombres λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ sont dûment choisis, le système (10.65) possède des solutions stables sous réserve que la matrice A soit à diagonale dominante au sens (10.63). Nous omettrons la démonstration de ce fait. En général les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont choisis pendant les générations d'essai des solutions du système (10.65) sur machine.

3. Détermination des racines complexes d'équations algébriques. Les racines réelles des polynômes peuvent être calculées à l'aide de l'arrêt programmé de la machine au changement de signe du polynôme (§ 6, chapitre 8). Pour déterminer les racines complexes on passe préalablement à un système équivalent de deux équations à deux variables, qui figurent les parties réelle et imaginaire de la racine cherchée.

Soit à trouver les zéros du polynôme de coefficients réels

$$\omega(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \tag{10.66}$$

où $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la variable complexe dans ses trois formes d'écriture.

Si maintenant l'on porte l'expression de z dans (10.66) et l'on groupe les parties réelle u et imaginaire v, on obtient

$$\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{10.67}$$

ou

$$\omega(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \tag{10.68}$$

Toute variable complexe est nulle si ses parties réelle et imaginaire le sont simultanément. Donc, pour déterminer les racines complexes on obtient à partir de (10.67) et (10.68) le système de deux équations

$$\begin{cases} u(x, y) = 0, \\ v(x, y) = 0 \end{cases} \tag{10.69}$$

ou

$$\begin{cases} u(r, \theta) = 0, \\ v(r, \theta) = 0. \end{cases} \tag{10.70}$$

On préférera l'un ou l'autre de ces systèmes selon la fonction des opérateurs mis en jeu. En coordonnées cartésiennes x et y, la réalisation de ce système par la méthode du gradient nécessite un nombre important de multiplieurs. En coordonnées polaires, il faut un grand nombre de générateurs de fonctions trigonométriques.

§ 4. Détermination des extrémums liés de fonctionnelles

De nombreux problèmes de programmation, de planification, de recherche opérationnelle et de théorie de la commande automatique sont énoncés sous forme de problèmes d'extrémum lié. Dans ces problèmes on cherche un vecteur $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ qui doit correspondre à un extrémum de la fonctionnelle $J(x)$ et vérifier en même temps certaines conditions. Ces conditions sont de trois types.

Le premier est composé des *égalités*

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m < n, \tag{10.71}$$

appelées *liaisons*.

Le second des *inégalités*

$$g_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10.72}$$

ou *contraintes*.

Le troisième type est mixte, i.e. composé de liaisons et de contraintes.

La détermination de l'extrémum lié est un problème bien plus compliqué que celui de l'extrémum libre. On le ramène donc à la recherche d'un extrémum libre, en remplaçant la fonctionnelle initiale et ses conditions par une fonctionnelle spécialement choisie dont l'extrémum libre coïncide avec l'extrémum lié de la fonctionnelle initiale. Dans la suite on supposera que le système de conditions données n'est pas contradictoire et que la fonctionnelle initiale ne possède qu'un extrémum.

1. Conditions du type liaison. Il existe plusieurs variantes de détermination de l'extrémum avec des conditions du type liaisons. Etudions la variante la plus simple sur l'exemple de la minimisation de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ avec la liaison $g(x_1, x_2) = 0$. Géométriquement minimiser cette fonctionnelle revient à chercher sur la courbe $g(x_1, x_2) = 0$ un point M en lequel la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ prend une valeur minimale.

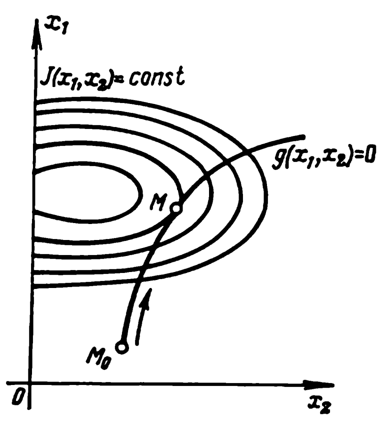


Fig. 10.3

Sur le plan x_1Ox_2 de la figure 10.3 sont représentées les lignes de niveau de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ sous forme d'un système de courbes ainsi que la courbe d'équation $g(x_1, x_2) = 0$. Le point M d'extrémum lié cherché est le point de tangence de la courbe $g(x_1, x_2) = 0$ avec une ligne de niveau. Cette ligne est plus grasse que les autres sur le dessin. Il n'est pas très difficile de trouver le point M avec la machine. En effet, générons la courbe $g(x_1, x_2) = 0$ à partir du point initial M_0 en réalisant les solutions des équations différentielles (§ 6, chapitre 8)

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega \frac{\partial g}{\partial x_2}; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega \frac{\partial g}{\partial x_1}; \quad x_1(0) = x_{10}; \quad x_2(0) = x_{20},$$

où x_{10}, x_{20} sont les coordonnées du point M_0 de la courbe $g(x_1, x_2) = 0$.

On surveillera en même temps la vitesse de variation de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$, qui est égale à

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial J}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}.$$

Au début la vitesse de variation de la fonctionnelle est négative. Cela veut dire qu'en se déplaçant sur la courbe $g(x_1, x_2) = 0$, le point représentatif se rapproche de l'extrémum cherché M. A l'instant t^* où la vitesse dJ/dt devient négative, il faut interrompre la

génération des fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à l'aide de l'arrêt programmé. Les valeurs $x_1(t^*)$ et $x_2(t^*)$ obtenues seront les coordonnées du point cherché. En effet, premièrement ce point appartient à la courbe $g(x_1, x_2) = 0$, et deuxièmement les valeurs numériques des coordonnées minimisent la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$.

Le procédé de recherche de l'extrémum lié qui vient d'être développé est bien plus une illustration géométrique du problème de l'extrémum lié qu'une méthode qui mérite d'être recommandée. Pour n et m grands, cette méthode n'est applicable que si $m + 1 = n$. Et même dans ce cas exceptionnel, déjà pour $m = 2$, l'expression de la vitesse de variation de la fonctionnelle est volumineuse et difficile à réaliser sur machine.

Deux autres méthodes ont obtenu droit de cité: la *méthode des multiplicateurs de Lagrange* et la *méthode des fonctions de pénalisation* (ou *méthode de Courant*).

1) Méthode des multiplicateurs de Lagrange. Lagrange a prouvé que l'extrémum lié local de la fonctionnelle $J(x)$ avec des liaisons du type (10.71) est confondu avec l'extrémum local libre de la fonctionnelle

$$I(x, \lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \tag{10.73}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ est pour l'instant le vecteur inconnu des multiplicateurs de Lagrange.

La recherche du minimum libre de la fonctionnelle $I(x, \lambda)$ ne présente aucune difficulté et s'effectue à l'aide de la méthode du gradient. Pour cela il faut générer la solution des équations différentielles de descente

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t)\frac{\partial I}{\partial x_j} = -\rho(t)\frac{\partial J}{\partial x_j} - \rho(t)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \tag{10.74}$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\rho(t) g_i(x), \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad \lambda_i(0) = \lambda_{i0},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

où λ_{i0} sont des valeurs initiales arbitraires des multiplicateurs de Lagrange.

Les équations de plus rapide descente comprennent deux types d'équations différentielles. A partir des premières qui dépendent de la fonctionnelle initiale à minimiser $J(x)$ et des liaisons (10.71) données on génère $x_j(t)$. Les secondes servent à générer $\lambda_i(t)$ et dépendent uniquement des liaisons. Il est essentiel que lorsque $x(t)$ vérifie la i-ème liaison ($g_i(x) = 0$) le multiplicateur λ_i correspondant prend une valeur constante.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet donc de ramener le problème de l'extrémum lié à un problème de l'extrémum libre moyennant une augmentation de la dimension du problème initial d'un nombre égal à celui des liaisons imposées.

2) Méthode des fonctions de pénalisation. Contrairement à la méthode exacte des multiplicateurs de Lagrange, cette méthode est approchée. Elle consiste également à ramener le problème de l'extrémum lié à un problème de l'extrémum libre par transformation de la fonctionnelle à minimiser. Le minimum lié de la fonctionnelle $J(x)$ avec des liaisons du type (10.71) est confondu avec l'extrémum libre de la fonctionnelle

$$I(x)=\gamma J(x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i^2(x) \tag{10.75}$$

ou

$$I(x)=\gamma J(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i |g_i(x)|. \tag{10.76}$$

Dans les deux cas $\lambda_i \gg \gamma > 0$ sont des nombres assez grands choisis à l'avance. On remarquera que dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, pour une structure similaire de la fonctionnelle (10.73), les quantités λ_i étaient inconnues et il fallait les déterminer.

Les termes positifs $\lambda_i g_i^2(x)$ et $\lambda_i \mid g_i(x) \mid$ sont appelés *fonctions de pénalisation*. Si les liaisons (10.71) imposées à x sont réalisées, alors $I(x) = J(x)$. Dans le cas contraire chaque terme $g_i^2(x)$ ou $\mid g_i(x) \mid$ des seconds membres de (10.75) et (10.76) caractérise l'écart de x par rapport à la surface $g_i(x) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots$). Plus les nombres λ_i sont grands, plus la valeur de la fonctionnelle $I(x)$ sera élevée et donc plus sera importante la pénalisation pour violation des liaisons. Courant a montré que lorsque $\lambda_i \to \infty$ le minimum libre de la fonctionnelle se confond avec la valeur exacte de l'extrémum lié, lequel peut être déterminé par la méthode des multiplicateurs de Lagrange par exemple.

Signalons que lorsqu'on recherche les maximums liés par la méthode des fonctions de pénalisation, il faut remplacer les fonctionnelles (10.75) et (10.76) respectivement par

$$I(x)=\gamma J(x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i^2(x), \quad I(x)=\gamma J(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i |g_i(x)|,$$

où tous les $\lambda_i > 0$ sont de grands nombres comme précédemment. Ces fonctionnelles ne diffèrent des fonctionnelles (10.75) et (10.76) que par le signe de la pénalisation globale pour violation des liaisons.

La méthode des fonctions de pénalisation est largement utilisée en raison de la simplicité de l'appareillage qu'elle met en jeu. Il est aisé de remarquer que les équations différentielles de plus rapide descente correspondant aux fonctionnelles (10.75) et (10.76) sont:

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t)\,\gamma\,\frac{\partial J}{\partial x_j} - \rho(t)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)\,\frac{\partial g_i}{\partial x_j};$$

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t)\,\gamma\,\frac{\partial J}{\partial x_j} - \rho(t)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\,\mathrm{sign}\,[g_i(x)],$$

où $\rho(t)$ est une fonction paramétrisante que nous supposerons égale à l'unité dans la suite.

Interprétons géométriquement la méthode des fonctions de pénalisation sur l'exemple simple de la minimisation de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ avec la liaison $g(x_1, x_2) = 0$. Il faut minimiser la fonctionnelle

$$I(x_1, x_2) = \gamma J(x_1, x_2) + \frac{1}{2}\lambda g^2(x_1, x_2)$$

en générant les solutions des équations différentielles de descente

$$\frac{dx_1}{dt} = -\gamma\,\frac{\partial J}{\partial x_1} - \lambda g(x_1, x_2)\,\frac{\partial g}{\partial x_1}, \tag{10.77}$$

$$\frac{dx_2}{\partial t} = -\gamma\,\frac{\partial J}{\partial x_2} - \lambda g(x_1, x_2)\,\frac{\partial g}{\partial x_2}. \tag{10.78}$$

La figure 10.4 représente sur le plan x_1Ox_2 les lignes de niveau de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ sous forme d'une famille de courbes $J(x_1, x_2) = \text{const}$ et les lignes de niveau de la fonction $F(x_1, x_2) = g^2(x_1, x_2)$. La surface $F(x_1, x_2) = g^2(x_1, x_2)$ rappelle un ravin dont le fond $g(x_1, x_2) = 0$ est figuré par la ligne grasse. L'autre ligne grasse est la ligne de niveau de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ qui est tangente à la courbe $g(x_1, x_2) = 0$ au point de minimum relatif M.

Les équations différentielles de descente admettent une interprétation géométrique simple. En effet, en vertu de (10.77) et (10.78), le point représentatif possède en tout point M_0 du plan x_1Ox_2 (à l'exclusion de la courbe $g(x_1, x_2) = 0$) deux composantes de la vitesse. La première composante, v_1, assure son déplacement dans une direction perpendiculaire aux lignes de niveau de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$, la seconde, v_2, dans une direction perpendiculaire aux lignes de niveau de la fonction $F(x_1, x_2) = g^2(x_1, x_2)$. La vitesse v_2 est prépondérente devant v_1 comme conséquence de $\lambda \gg \gamma$. Donc le point représentatif se déplace vite vers le fond du ravin et relativement lentement dans la direction du minimum de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$

Une fois qu'il a atteint le fond, il se dirige vers le minimum de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ sous l'action de v_1 et regagne rapidement la courbe $g(x_1, x_2) = 0$; puis il se déplace de nouveau vers le minimum de $J(x_1, x_2)$ et revient ensuite sur la courbe et ainsi de suite. On assiste ainsi à une lente dérive du point représentatif au voisinage de la courbe $g(x_1, x_2) = 0$ vers le minimum de $J(x_1, x_2) = 0$.

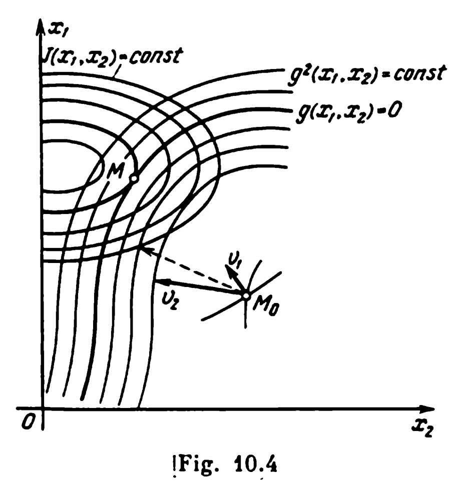


Fig. 10.4

Le mouvement de translation du point représentatif vers le minimum de $J(x_1, x_2)$ prend fin au point M d'extrémum lié, car les deux composantes v_1 et v_2 deviennent colinéaires. Au voisinage du minimum il ne subsistera que des déplacements rapides du point représentatif sur les versants du ravin.

2. **Conditions du type contraintes.** On recherche l'extrémum de la fonctionnelle $J(x)$ avec des contraintes à l'aide de la méthode des fonctions de pénalisation exposée plus haut. Mais il faut préalablement remplacer le système de contraintes $g_i(x) \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) par un système de liaisons équivalentes par introduction de fonctions auxiliaires. Les fonctions auxiliaires les plus commodes sont

$$\psi_i(x) = g_i(x) \operatorname{sign} g_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10.79}$$

où

$$\operatorname{sign} g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } g_i(x) \geqslant 0, \\ 1 & \text{pour } g_i(x) < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } g_i(x) \geqslant 0, \\ g_i(x) & \text{pour } g_i(x) < 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Après modification du type des conditions, la recherche de l'extrémum lié est facilement accessible. Etudions maintenant la maximisation de la fonctionnelle $J(x)$ avec des contraintes. En vertu de la méthode des fonctions de pénalisation, il faut chercher le maximum libre de l'une des fonctionnelles

$$I(x)=\gamma J(x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\psi_i^2(x) \qquad (10.80)$$

ou

$$I(x)=\gamma J(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,|\,\psi_i(x)\,|, \qquad (10.81)$$

où tous les $\lambda_i \gg \gamma > 0$.

Il est aisé de remarquer que lorsque le vecteur x vérifie le système de contraintes donné, on a $I(x) = \gamma J(x)$.

Arrêtons-nous pour commencer sur la fonctionnelle (10.80) et cherchons les équations différentielles correspondantes de plus rapide montée. Auparavant simplifions l'expression de la pénalisation globale (10.80) et, tenant compte de $[\operatorname{sign} g_i(x)]^2 = \operatorname{sign} g_i(x)$, mettons la fonctionnelle (10.80) sous la forme:

$$I(x)=\gamma J(x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i^2(x)\operatorname{sign} g_i(x). \qquad (10.82)$$

Pour (10.82) les équations différentielles de plus rapide montée sont

$$\frac{dx_j}{dt}=\gamma\frac{\partial J}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\operatorname{sign} g_i(y), \qquad (10.83)$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Passons maintenant à la fonctionnelle (10.81). Compte tenu de l'identité évidente $g_i(x)\operatorname{sign} g_i(x) = -|\,\psi_i(x)\,|$, cette fonctionnelle se met sous la forme plus simple

$$I(x)=\gamma J(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)\operatorname{sign} g_i(x), \qquad (10.84)$$

et l'équation différentielle de plus rapide montée s'écrit

$$\frac{dx_j}{\partial t}=\gamma\frac{\partial J}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\operatorname{sign} g_i(x),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (10.85)$$

Toute équation différentielle de la forme (10.83) ou (10.85) est constituée en fait de deux équations. En effet, lorsque x vérifie

les contraintes $g_i(x) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, alors sign $g_i(x) = 0$ et les équations différentielles de recherche de l'extrémum s'écrivent

$$\frac{dx_j}{dt} = \gamma \frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.86}$$

Dans le cas contraire, lorsque l'une au moins des contraintes $g_i(x) \geqslant 0$ est violée, le processus est décrit par les équations (10.83) ou (10.85), car sign $g_i(x) = 1$. Donc le système des contraintes partage l'espace vectoriel x de dimension n en deux domaines. L'équation (10.86) est associée à un domaine, l'équation (10.83) ou (10.85) à l'autre. On dit des processus décrits par des équations différentielles composées qu'ils sont de structure variable.

La figure 10.5 interprète géométriquement pour $n = 2$ et $m = 1$ la recherche du maximum lié de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ avec une

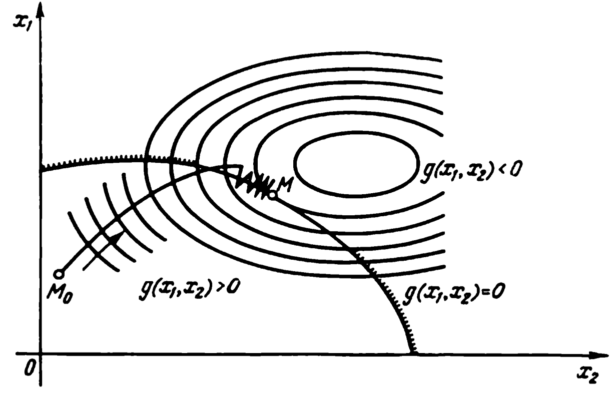


Fig. 10.5

seule contrainte $g(x_1, x_2) \geqslant 0$. La contrainte $g(x_1, x_2) \geqslant 0$ définit sur le plan x_1Ox_2 le domaine des valeurs admissibles des variables x_1, x_2 pour lesquelles $g(x_1, x_2) > 0$ et sign $g(x_1, x_2) = 0$. Les points du plan x_1Ox_2 extérieurs à ce domaine vérifient la relation inverse $g(x_1, x_2) < 0$ et sign $g(x_1, x_2) = 1$. La frontière est la courbe $g(x_1, x_2) = 0$. La famille de courbes est celle des lignes de niveau de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$. Le maximum lié M cherché correspond au point de tangence d'une ligne de niveau avec la courbe $g(x_1, x_2) = 0$. La trajectoire du point représentatif est issue du point M_0. Elle est décrite par le système d'équations différentielles (10.86) tant que la contrainte $g(x_1, x_2) \geqslant 0$ n'est pas violée. Dès que la trajectoire coupe la courbe $g(x_1, x_2) = 0$, le processus est décrit par les équations (10.83) ou (10.85) qui renferment, elles, deux composantes de la vitesse. L'une est dirigée vers le maximum de la fonctionnelle $J(x_1, x_2)$ avec un coefficient de proportionnalité

γ, l'autre suivant la normale à la courbe $g(x_1, x_2) = 0$ dans la direction du domaine admissible avec le coefficient de proportionnalité λ. Le mouvement dans la direction du domaine admissible est prépondérant devant le mouvement vers le maximum de la fonctionnelle $J(x)$. Mais dès que le point représentatif accède au domaine admissible, il ne reste en jeu qu'une composante de la vitesse qui réalise le mouvement vers le maximum. Donc soit le point représentatif traverse la frontière $g(x_1, x_2) = 0$ et s'éloigne du domaine admissible, soit il y revient de nouveau. Le point représentatif donne l'impression de glisser sur la courbe $g(x_1, x_2) = 0$ en se rapprochant du point cherché M. Ce mouvement porte le nom de *régime de glissement*. Pour qu'il se manifeste il est nécessaire que $\lambda \geqslant \gamma$.

3. Conditions de type mixte. La recherche de l'extrémum lié d'une fonctionnelle avec des conditions mixtes est commode à effectuer avec la méthode des fonctions de pénalisation. A cet effet il faut préalablement remplacer toutes les contraintes par des liaisons équivalentes.

Si donc l'on maximise une fonctionnelle $J(x)$ de n variables avec les liaisons $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, et les contraintes $\varphi_k(x) \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, l$, en vertu de la méthode des fonctions de pénalisatio n cherche l'extrémum libre de la fonctionnelle

$$I(x) = \gamma J(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i^2(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l} \mu_k \varphi_k^2(x) \operatorname{sign} \varphi_k(x)$$

ou

$$(x) = \gamma J(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i |g_i(x)| - \sum_{k=1} \mu_k |\varphi_k(x)| \operatorname{sign} \varphi_k(x),$$

où tous les $\lambda_i \gg \gamma > 0$, $\mu_k \gg \gamma$.

4. Remarques sur la réalisation de la méthode des fonctions de pénalisation sur machine. La lourdeur des expressions analytiques (10.83) et (10.85) risque de donner l'illusion qu'elles seront difficiles à générer sur machine. En réalité les dépendances

$$\lambda_i \operatorname{sign} g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad g_i(x) \geqslant 0, \\ \lambda_i & \text{pour} \quad g_i(x) < 0; \end{cases}$$

$$\lambda_i g_i(x) \operatorname{sign} g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad g_i(x) \geqslant 0, \\ \lambda_i g_i(x) & \text{pour} \quad g_i(x) < 0 \end{cases}$$

sont assez simples à réaliser par des relais électroniques à diodes organisés sur la base de limiteurs d'amplitude (§ 10, chapitre 2). Ce fait a suggeré le choix des fonctions auxiliaires sous la forme (10.79). La figure 10.6, *a* et *b*, représente les blocs correspondants et leurs équivalents électriques.

Les contraintes $x_j \geqslant 0$ ou $x_j \leqslant 0$ sont très faciles à réaliser. La figure 10.6, *c* et *d*, représente deux tels blocs. On remarque que

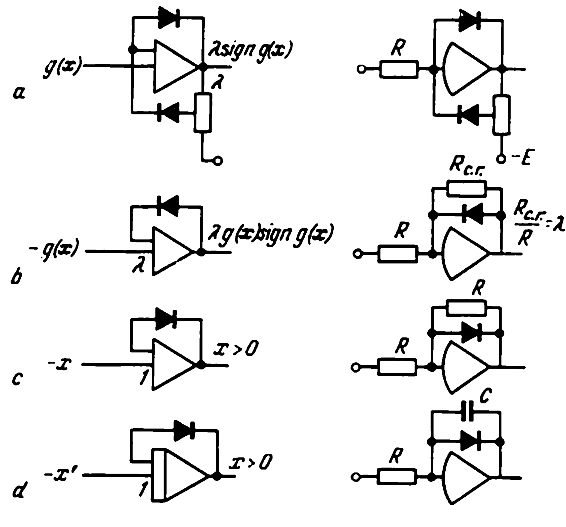


Fig. 10.6

la réalisation de ces contraintes sur machine nécessite le branchement d'une seule diode dans le circuit de contre-réaction de l'amplificateur opérationnel qui délivre la variable x_j.

§ 5. Exercices

1. Trouver des expressions mathématiques nécessaires telles que la machine puisse, d'après des fonctions données $y_1(t)$ et $y_2(t)$, générer la solution $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du système d'équations

$$\begin{cases} x_1(t)\cos x_2(t) + y_1(t) = 0, \\ x_1(t)\sin x_2(t) + y_2(t) = 0. \end{cases}$$

Justifier la méthode choisie.

2. Montrer qu'une condition suffisante de stabilité des solutions des équations de descente (10.47) avec $\rho_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, est que le jacobien du système (10.37) soit à diagonale dominante au sens

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)^2 > \sum_{j \neq i}^{n} \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Montrer qu'une condition suffisante de stabilité des solutions des équations différentielles de descente (10.47) avec

$$\rho_j(t) = \frac{1}{|\partial F_j/\partial x_j|}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

est que le jacobien du système (10.37) soit à diagonal dominante au sens

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right| > \sum_{j \neq i}^{n} \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

4. Simuler par les méthodes habituelles de la programmation le système

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 1 &= 0, \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 &= 0. \end{aligned}$$

5. Simuler par les méthodes habituelles de la programmation le système d'équations

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 + 1 &= 0, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 - 1 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 1 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Justifier la méthode choisie.

6. Programmer la résolution sur machine de l'équation algébrique

$$x^3 + 6x + 2 = 0.$$

7. Programmer la minimisation de la fonctionnelle

$$J(x) = x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + 2x_3^2$$

avec les contraintes

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2 &\leqslant 0, \\ x_1 - x_2 - 2 &\leqslant 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3 &\leqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

CHAPITRE 11

CINÉTIQUE DES RÉACTIONS ISOTHERMES HOMOGÈNES

§ 1. Réactions du premier ordre

La cinétique chimique a pour objet l'étude des phénomènes relatifs aux variations par rapport au temps de la concentration des substances entrant en réaction. La vitesse d'une réaction chimique se définit comme la variation dans l'unité de temps de la concentration des corps mis en présence.

La description mathématique de la cinétique des réactions est basée sur la loi d'action des masses, en vertu de laquelle la vitesse d'une réaction chimique est proportionnelle au produit des concentrations des corps mis initialement en présence.

Deux substances A et B entrent en réaction. La vitesse de la réaction v est donc: $v = kC_A(t)\,C_B(t)$, où $C_A(t)$ et $C_B(t)$ sont les concentrations courantes des substances A et B, k le coefficient de proportionnalité, qui ne dépend pas de la concentration des corps réagissants. On l'appelle *constante de la vitesse de réaction.* Cette constante croît avec la température. La vitesse de la réaction dépend par ailleurs de la molarité de la réaction, qui est fonction du nombre de molécules intervenant à chaque étape de la réaction.

Considérons des réactions du premier ordre qui sont caractérisées par l'existence d'un seul produit initial. La cinétique de ces réactions est décrite par des équations différentielles linéaires.

1. Réaction irréversible du premier ordre. Un corps A se transforme en un corps B en vertu du schéma $A \xrightarrow{k} B$, où k est la constante de la vitesse de réaction, A le corps initial, B le produit final de la réaction. Nous n'avons ici qu'un seul produit de départ, c'est pourquoi la vitesse ne dépend que de la concentration $C_A(t)$.

En vertu de la loi d'action des masses, les équations différentielles de la cinétique s'écrivent

$$C'_A(t) = -kC_A(t); \quad C'_B(t) = kC_A(t) \tag{11.1}$$

avec les conditions initiales $C_A(0) = C_{A0}$, $C_B(0) = C_{B0}$. Le signe « moins» de la première équation indique que la concentration du corps A diminue au cours de la réaction. De façon analogue le signe

« plus » de la deuxième équation correspond à un accroissement de la concentration du corps B.

Le schéma fonctionnel de la figure 11.1 génère la solution du système d'équations linéaires (11.1).

2. **Réaction en chaîne irréversible.** Elle se déroule selon le schéma

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C \xrightarrow{k_3} D \xrightarrow{k_4} 2E.$$

A est le produit de départ, B, C et D les produits intermédiaires, E le produit final, k_1, k_2, k_3, k_4 les constantes des vitesses des diverses étapes de la réaction. Au cours de la réaction la concentration de A diminue, celle du produit final E augmente. La concentration des produits intermédiaires commence par augmenter pour diminuer ensuite. Le facteur 2 de la dernière étape est le coefficient stœchiométrique: il tient compte de la molarité de l'étape.

Fig. 11.1

Si l'on applique à chaque étape de la réaction la loi d'action des masses, on obtient le *système d'équations différentielles* de la cinétique:

$$\begin{aligned}
&C'_A(t) = -k_1C_A(t), && C_A(0) = C_{A0},\\
&C'_B(t) = k_1C_A(t) - k_2C_B(t), && C_B(0) = 0,\\
&C'_C(t) = k_2C_B(t) - k_3C_C(t), && C_C(0) = 0,\\
&C'_D(t) = k_3C_C(t) - k_4C_D(t), && C_D(0) = 0,\\
&C'_E(t) = 2k_4C_D(t), && C_E(0) = 0.
\end{aligned} \qquad (11.2)$$

Le schéma fonctionnel correspondant à ce système d'équations est représenté sur la figure 11.2. Il met en jeu cinq intégrateurs, c'est-à-dire le nombre de composants de la réaction. L'intégrateur *6* et le circuit de commande préprogrammée constituent le mesureur du temps qui assure l'arrêt programmé de la résolution aux instants donnés t_3 (les interrupteurs *Clé 1* et *Clé 2* sont en position basse).

L'instant t_3 est donné par le diviseur *Div*. Par ailleurs le circuit de commande préprogrammée est susceptible d'être utilisé pour interrompre la résolution à l'instant où l'un des produits intermédiaires (sur la figure, le produit B) atteint sa concentration maximale. Pour réaliser cette interruption, le sommateur *1* délivre en vertu de la deuxième équation du système (11.2) la variable $C'_B(t)$ qui est appliquée à l'entrée du circuit de commande préprogrammée (la *Clé 1* et la *Clé 2* sont en position haute). Le circuit de commande préprogrammée interrompt la génération de la solution dès que la variable $C'_B(t)$ prend la valeur zéro, ensuite on peut

figer à la sortie de l'intégrateur *2* le maximum de $C_B(t)$ et, à la sortie de l'intégrateur *6*, l'instant correspondant à ce maximum. On détermine de façon analogue les extrémums des concentrations des autres produits intermédiaires.

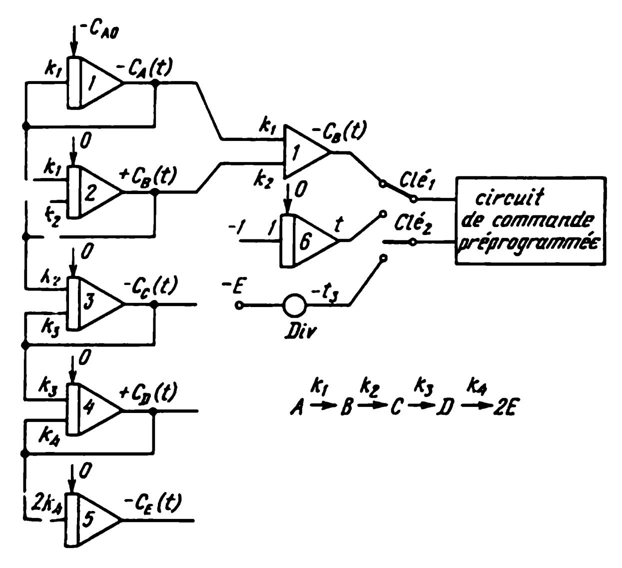
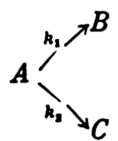


Fig. 11.2

3. Réaction parallèle irréversible du premier ordre. Elle s'effectue selon le schéma



Au terme de la réaction le produit initial donne un produit final et un produit secondaire C. La cinétique de la réaction est décrite par les équations

$$C'_A(t) = -(k_1+k_2)\,C_A(t), \qquad C_A(0) = C_{A0},$$
$$C'_B(t) = k_1 C_A(t), \qquad C_B(0) = 0,$$
$$C'_C(t) = k_2 C_A(t), \qquad C_C(0) = 0.$$

Le schéma fonctionnel correspondant est représenté sur la figure 11.3, *a*.

4. **Réaction réversible du premier ordre.** Elle se déroule selon le schéma $A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B$ auquel correspond le système d'équations différentielles de la cinétique

$$C'_A(t) = -k_1 C_A(t) + k_2 C_B(t),$$
$$C'_B(t) = k_1 C_A(t) - k_2 C_B(t)$$
$$C_A(0) = C_{A0}, \quad C_B(0) = 0.$$

Le schéma fonctionnel générant la solution de ce système est représenté sur la figure 11.3, *b*.

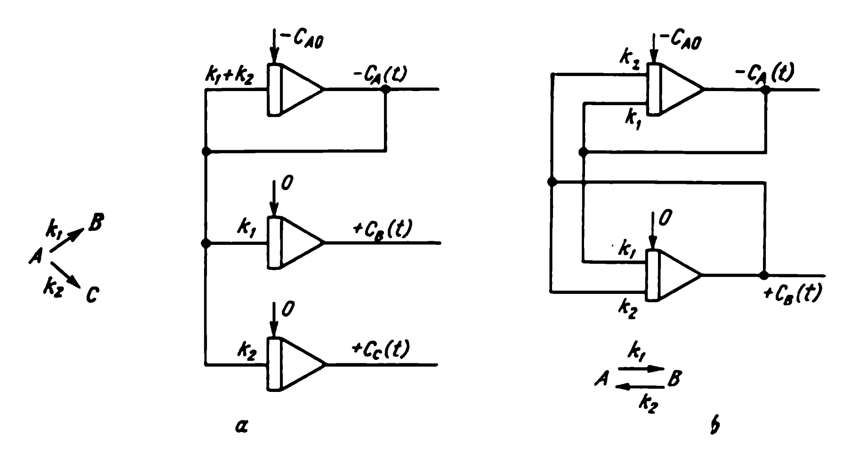


Fig. 11.3

Pour les schémas plus ramifiés de réactions chimiques du premier ordre, les équations différentielles de la cinétique sont composées en vertu de la loi d'action des masses comme précédemment.

§ 2. Réactions complexes

Passons maintenant à l'examen des réactions complexes qui font intervenir deux produits de départ. Sur le plan mathématique il correspond à ces réactions des équations différentielles non linéaires de la cinétique qui, en principe, ne possèdent pas de solutions analytiques.

5. La réaction s'effectue selon le schéma $A + B \xrightarrow{k} C$. En vertu de la loi d'action des masses, les équations différentielles de la cinétique s'écrivent

$$\begin{aligned} C'_A(t) &= -kC_A(t)\,C_B(t), & C_A(0) &= C_{A0},\\ C'_B(t) &= -kC_A(t)\,C_B(t), & C_B(0) &= C_{B0},\\ C'_C(t) &= kC_A(t)\,C_B(t), & C_C(0) &= 0. \end{aligned} \tag{11.3}$$

C'est un système d'équations différentielles non linéaires avec des conditions initiales. Le schéma fonctionnel réalisant la solution de

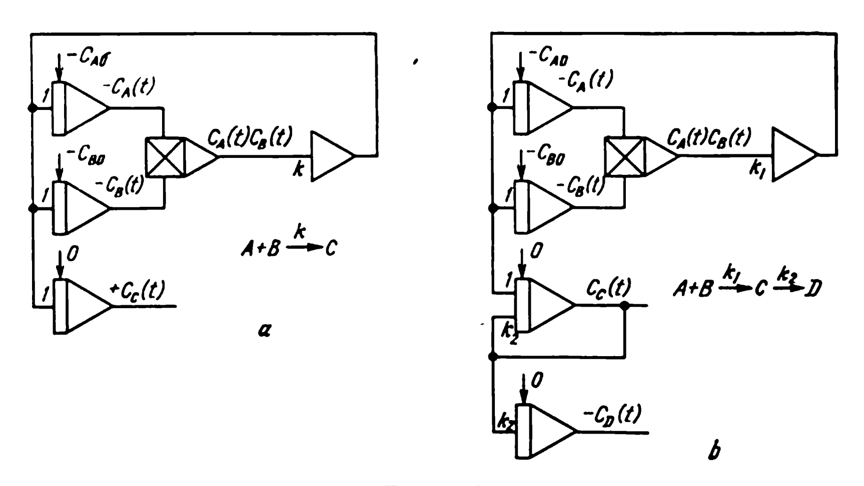


Fig. 11.4

ce système est représenté sur la figure 11.4, *a*. Le montage comporte un multiplieur pour la formation des seconds membres du système (11.3).

6. La réaction se déroule suivant le schéma $A + B \xrightarrow{k_1} C \xrightarrow{k_2} D$. Cette réaction est caractérisée par la présence du produit intermédiaire C. Les équations différentielles de la cinétique seront:

$$\begin{aligned} C'_A(t) &= -k_1C_A(t)\,C_B(t), & C_A(0) &= C_{A0},\\ C'_B(t) &= -k_1C_A(t)\,C_B(t), & C_B(0) &= C_{B0},\\ C'_C(t) &= k_1C_A(t)\,C_B(t) - k_2C_C(t), & C_C(0) &= 0,\\ C'_D(t) &= k_2C_C(t), & C_D(0) &= 0. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Le schéma fonctionnel correspondant est représenté sur la figure 11.4, *b*.

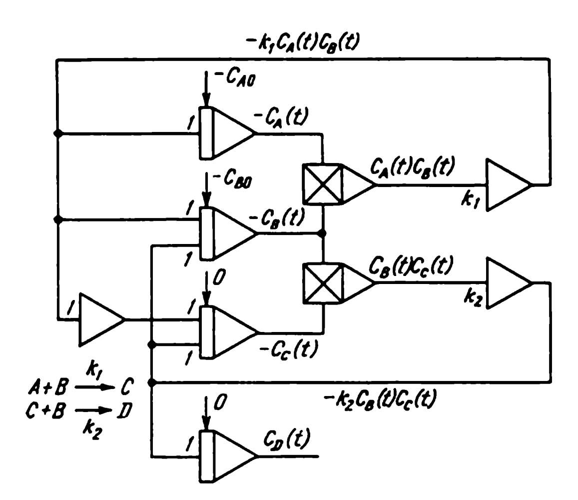


Fig. 11.5

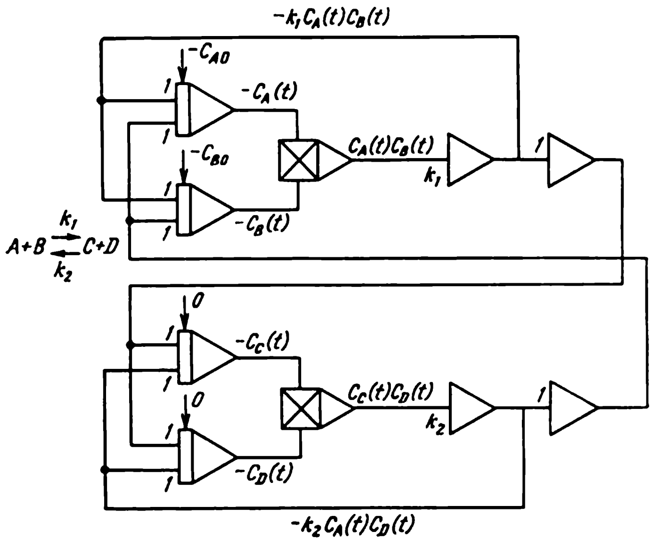


Fig. 11.6

7. La réaction s'opère suivant le schéma $\begin{matrix} A + B \xrightarrow{k_1} C \\ C + B \xrightarrow[k_2]{} D \end{matrix}$. A et B sont les produits de départ, C un produit intermédiaire, D le produit final. Le système d'équations différentielles de la cinétique correspondant est :

$$\begin{aligned} &C'_A(t) = -k_1 C_A(t) C_B(t), && C_A(0) = C_{A0}, \\ &C'_B(t) = -k_1 C_A(t) C_B(t) - k_2 C_B(t) C_C(t), && C_B(0) = C_{B0}, \\ &C'_C(t) = k_1 C_A(t) C_B(t) - k_2 C_B(t) C_C(t), && C_C(0) = 0, \\ &C'_D(t) = k_2 C_B(t) C_C(t), && C_D(0) = 0. \end{aligned}$$

Le schéma fonctionnel est représenté sur la figure 11.5.

8. La réaction réversible s'écoule suivant le schéma $A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} C + D$. Le système d'équations différentielles est

$$\begin{aligned} &C'_A(t) = -k_1 C_A(t) C_B(t) + k_2 C_C(t) C_D(t), && C_A(0) = C_{A0}, \\ &C'_B(t) = -k_1 C_A(t) C_B(t) + k_2 C_C(t) C_D(t), && C_B(0) = C_{B0}, \\ &C'_C(t) = k_1 C_A(t) C_B(t) - k_2 C_C(t) C_B(t), && C_C(0) = 0, \\ &C'_D(t) = k_1 C_A(t) C_B(t) - k_2 C_C(t) C_D(t), && C_D(0) = 0. \end{aligned}$$

Le schéma fonctionnel est celui de la figure 11.6.

§ 3. Contrôle de la machine. Choix des échelles

Lorsqu'on étudie la cinétique des réactions chimiques, la méthode de la variable redondante (§ 4, chapitre 4) convient bien au contrôle du calculateur analogique. Montrons sur l'exemple de la réaction $A + B \xrightarrow{k_1} C \xrightarrow{k_2} D$ la marche à suivre. Pour relation de contrôle prenons la somme

$$y(t) + \frac{1}{2} C_A(t) + \frac{1}{2} C_B(t) + C_C(t) + C_D(t) = 0,$$

où $y(t)$ est la variable redondante dont il faut trouver l'équation différentielle déterminante. Dérivons à cet effet la relation de contrôle par rapport à t :

$$y'(t) + \frac{1}{2} C'_A(t) + \frac{1}{2} C'_B(t) + C'_C(t) + C'_D(t) = 0$$

et portons dans cette expression les dérivées $C'_A(t)$, $C'_B(t)$, $C'_C(t)$ et $C'_D(t)$ tirées des équations différentielles de la cinétique (11.4). Cette substitution nous fournit l'équation différentielle déterminante pour la variable $y(t)$:

$$y'(t) = 0, \quad y(0) = -\frac{1}{2} C_{A0} - \frac{1}{2} C_{B0}.$$

Cette équation différentielle d'une simplicité inattendue admet une interprétation chimique simple liée à la loi de conservation de la matière. La variable redondante $y(t)$ est une constante égale à $-\frac{1}{2}(C_{A0}+C_{B0})$.

Donc, en générant le système d'équations différentielles (11.4), on peut contrôler le fonctionnement de la machine à l'aide de la relation simple

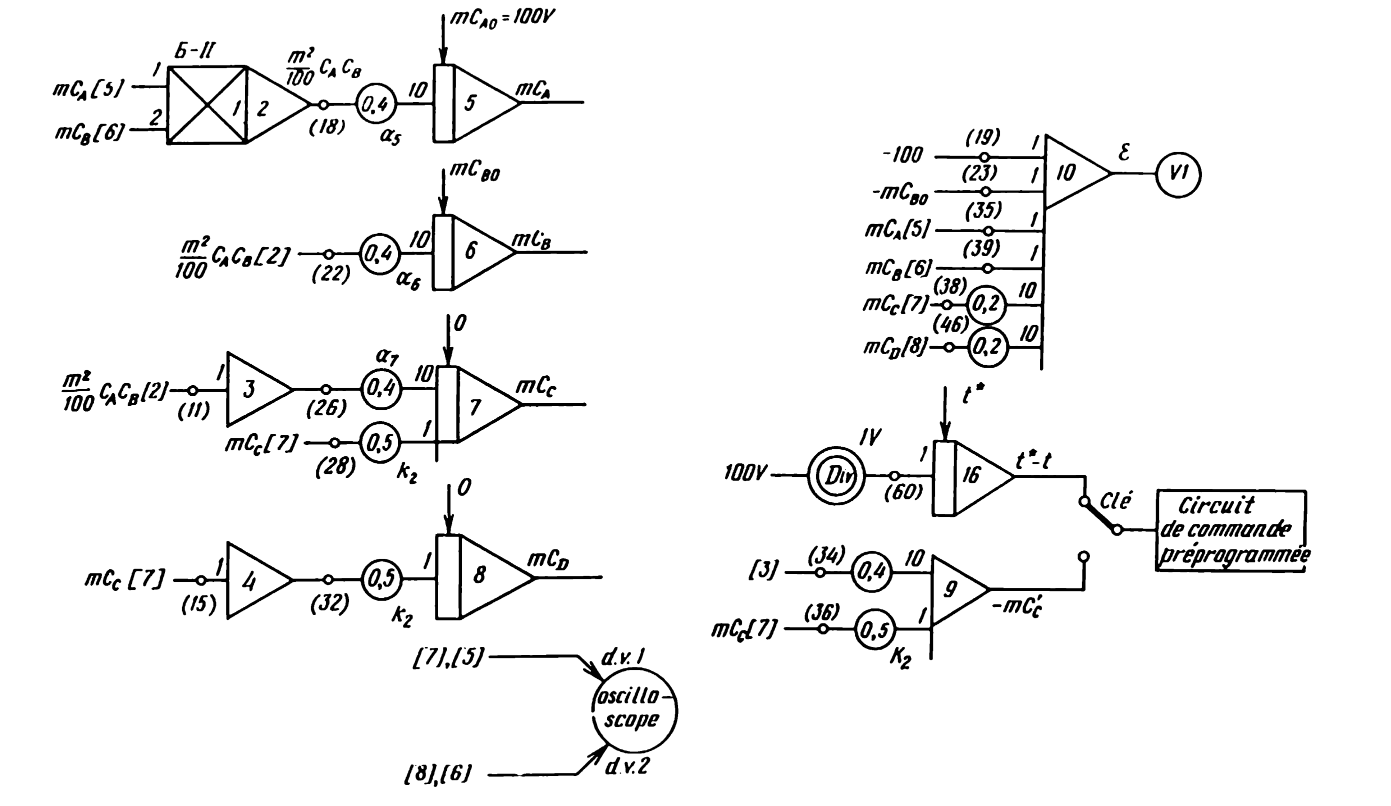
$$\frac{1}{2}[C_A(t)-C_{A0}]+\frac{1}{2}[C_B(t)-C_{B0}]+C_C(t)+C_D(t)=0$$

qui est réalisée sur la machine en même temps que le système (11.4).

Dans les calculateurs analogiques, les variables mathématiques sont représentées à l'aide d'échelles par des tensions électriques: les variables machine. On ne peut calculer les échelles que lorsqu'on connaît les valeurs maximales des variables mathématiques. Dans les problèmes de cinétique chimique, les variables mathématiques dépendantes sont figurées par les concentrations des produits, qui sont fonctions du temps. Les bornes de variation des concentrations des produits sont très souvent faciles à déterminer d'après la nature même de la réaction étudiée.

A titre d'exemple procédons à un choix des échelles des concentrations pour la réaction $A+B\xrightarrow{k_1}C\xrightarrow{k_2}D$, en supposant que toutes les valeurs: $C_A(0)=C_{A0}$, $C_B(0)=C_{B0}$, k_1, k_2 sont données dans les mêmes unités et en outre $C_{A0}>C_{B0}$. On choisira les échelles pour les variables $C_A(t)$, $C_B(t)$, $C_C(t)$ et $C_D(t)$. Il est nécessaire de déterminer les valeurs maximales des concentrations de tous les produits. En vertu du schéma de la réaction dans laquelle tous les coefficients stœchiométriques sont égaux à l'unité, on peut affirmer que la concentration maximale $C_C(t)$ du produit intermédiaire C et la concentration $C_D(t)$ du produit final D ne peuvent excéder C_{B0} et *a fortiori* C_{A0}. Pour la commodité de la comparaison des données, on prendra la même échelle $m=\frac{100}{C_{A0}}$ pour représenter les concentrations de tous les produits.

Le circuit de commutation du calculateur MH-7M qui correspond à la cinétique de la réaction considérée est représenté sur la figure 11.7. Ce circuit met en jeu un sommateur *9* qui délivre une tension électrique correspondant à la variable $C'_C(t)$. Lorsque cette variable passe par zéro, le circuit de commande préprogrammée (l'interrupteur *Clé* est en position basse) stoppe la machine et l'on peut relever la valeur maximale de la concentration du produit intermédiaire C. L'intégrateur *16* qui fait office de mesureur du temps ($t^*=0$) note le temps qui correspond à la concentration maximale de C. Lorsque l'interrupteur *Clé* est en position haute, l'intégrateur *16* et le circuit de commande préprogrammée permettent de stopper



Б-11
mCA [5]
mCB [6]
mCA0 = 100V
mCB0
mCA
mCB
mCC
mCD
(18)
(22)
(11)
(26)
(28)
(15)
(32)
0,4
0,5
[7],[5]
[8],[6]
d.v.1
d.v.2
oscillo-scope
-100
-mCB0
mCC [7]
mCD [8]
(19)
(23)
(35)
(39)
(38)
(46)
0,2
ε
V1
t*
t*-t
100V
1V
Div
(60)
Clé
Circuit de commande préprogrammée
[3]
(34)
(36)
-mC'C

Fig. 11.7

la résolution à n'importe quel instant t^* préfix. La quantité t^* est donnée sous forme de la condition initiale de l'intégrateur *16*. Le sommateur *10* délivre l'erreur ε de la relation de contrôle, qui est estimée par le voltmètre $V1$.

La concordance des échelles est due à la mise en jeu d'un multiplieur qui, par suite de la présence du facteur d'échelle 0,01, implique un choix convenable des coefficients de transfert α_5, α_6, α_7. Etablissons la relation mathématique à laquelle doivent nécessairement satisfaire ces coefficients qui sont pour l'instant inconnus. Puisque l'on désire obtenir à la sortie de l'intégrateur *5* la variable $mC_A(t)$, il est nécessaire d'appliquer à son entrée la dérivée de cette quantité, i.e. $mC'_A(t)$ ou, ce qui revient au même (cf. les équations (11.4)), la variable $mk_1C_A(t)C_B(t)$.

Par ailleurs la variable à appliquer à l'entrée de l'intégrateur *5* peut être représentée en fonction de la variable de sortie du multiplieur et du coefficient de transfert inconnu α_5

$$mk_1C_A(t)C_B(t)=\frac{m^2}{100}C_A(t)C_B(t)\alpha_5,$$

d'où l'on déduit

$$\alpha_5=\frac{100\cdot k_1}{m}=k_1C_{A0}.$$

On a donc exprimé le coefficient de transfert en fonction des paramètres initiaux du problème. Pour fixer les idées prenons $k_1 = 1$; $k_3 = 0{,}5$; $C_{A0} = 4$; $C_{B0} = 3$. Donc $\alpha_B = 4$.

§ 4. Exercices

Etant donné le schéma d'une réaction, on demande ses équations différentielles de la cinétique, les schémas fonctionnels et de commutation, le schéma de contrôle.

Générer les solutions des équations différentielles de la cinétique. Modifier l'échelle du temps de génération de telle sorte que les processus s'établissent en 15 à 20 s. Relever les valeurs de la concentration de tous les produits avec un pas d'une seconde de temps machine (i.e. 15 à 20 points).

S'assurer de l'efficacité du contrôle en déconnectant du montage principal les circuits appropriés.

Déterminer l'instant et la valeur de la concentration maximale des produits intermédiaires de la réaction à l'aide du circuit de commande préprogrammée.

Visualiser et reproduire les courbes de la forme $C = \varphi(C_k)$, où C_k est la concentration du produit final, C la concentration

du produit initial ou intermédiaire :

1) $A \xrightarrow{0,4} B \xrightarrow{0,6} 2C$, $C_A(0)=4$;

2) $A+B \xrightarrow{0,5} C \xrightarrow{0,3} D$, $C_A(0)=4$, $C_B(0)=3$;

3) $A \xrightarrow{1,0} B \xrightarrow{0,3} 3C$. $C_A(0)=5$;

4) $A+B \xrightarrow{0,1} C \xrightarrow{0,4} 2D$, $C_A(0)=2$, $C_B(0)=5$;

5) $A \xrightarrow{0,3} D$, $A \xrightarrow{0,1} B \xrightarrow{0,5} 3C$ $C_A(0)=5$;

6) $A+B \xrightarrow{0,6} C$, $C \xrightarrow{0,3} D$, $C \xrightarrow{0,2} E$ $C_A(0)=4$, $C_B(0)=5$;

7) $A \xrightarrow{0,7} B \xrightarrow{0,6} C \xrightarrow{0,5} D \xrightarrow{0,4} 3E$, $C_A(0)=10$.

Les valeurs numériques des constantes de la vitesse des réactions et les concentrations initiales des produits de départ sont données dans un même système d'unités.

CHAPITRE 12

RÉSOLUTION ET ÉTUDE DES JEUX DE DIMENSIONS $2\times m$

§ 1. Notions fondamentales de la théorie des jeux

Lorsqu'on résout des problèmes pratiques relevant de l'économie, de l'organisation et la gestion de la production, ainsi que de l'art militaire, on a souvent à envisager des situations de conflit. Les situations de conflit opposent les intérêts de deux ou plusieurs parties antagonistes. La théorie mathématique de l'analyse des situations conflictuelles est une discipline toute jeune encore qui porte le nom de théorie des jeux. L'objectif de cette théorie est de définir les lois du comportement optimal des antagonistes dans les situations conflictuelles. La situation conflictuelle la plus simple est le jeu. Ce dernier se distingue des autres situations conflictuelles en ce qu'il obéit à des règles rigoureusement définies.

Deux personnes A et B jouent à un jeu sous la surveillance d'un arbitre. Le premier joueur dispose de M coups, le second de N. Ce jeu est appelé jeu rectangulaire de dimensions $M \times N$. Si A joue son i-ème coup et B son j-ème, le gain de A est a_{ij}, celui de B, $-a_{ij}$. Le gain de A pour tous les i et j peut être consigné dans un tableau appelé matrice des règlements ou simplement matrice du jeu:

$$A=[a_{ij}]; \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ M; \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Les éléments de cette matrice s'appellent *règlements*. Ils représentent le gain du joueur A et peuvent être positifs ou négatifs. Si $a_{ij}>0$, le joueur A a gagné, si $a_{ij}<0$, il a perdu et doit régler cette somme au joueur B.

Chaque coup d'un joueur est appelé *stratégie* ou *stratégie pure*. Les joueurs ont le trait simultanément, c'est pourquoi ils ne savent rien du coup de l'adversaire. L'arbitre se fonde sur la matrice des règlements pour déterminer après chaque trait la somme à verser. Les joueurs jouent coup après coup. Chacun s'efforce de mener son jeu de façon à faire profiter le moins possible son adversaire de ses stratégies. Pour cela il faut que chaque joueur fasse alterner ses stratégies conformément à une loi aléatoire. Les stratégies pures qui sont utilisées avec une certaine fréquence sont appelées *stratégies mixtes*.

16—0654

Soit x_i la probabilité que le joueur A joue son i-ème coup et y_j la probabilité que le joueur B joue son j-ème coup. Le gain moyen du joueur A est donc

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} a_{ij} x_i x_j. \qquad (12.1)$$

Il est évident que $\sum_{i=1}^{M} x_i = 1$, $\sum_{j=1}^{N} y_j = 1$. Certaines stratégies ne présentent aucun intérêt, leur probabilité d'utilisation est nulle. Celles qui interviennent le plus souvent sont appelées *actives*.

Le joueur A désireux de s'assurer un gain moyen maximal se livre au raisonnement suivant: « Supposons que B sache mon choix, il devra donc prendre y_j de façon à minimiser mon gain, i.e. $f(x, y)$. Dans ce cas je prends x_i de manière à maximiser mon gain. » Le gain moyen du joueur A sera

$$v_A = \max_x \min_y f(x, y). \qquad (12.2)$$

En faisant le même raisonnement, le joueur B ne perd pas plus que

$$v_B = \min_y \max_x f(x, y). \qquad (12.3)$$

En théorie des jeux on démontre le théorème de minimax qui dit que $v_A = v_B$. Si le choix de x et y obéit à (12.2) et (12.3), on dit que les joueurs utilisent optimalement leurs stratégies mixtes. La quantité v_A est appelée *valeur du jeu.*

La matrice du jeu peut posséder un terme qui soit à la fois minimum dans sa ligne et maximum dans sa colonne ou vice versa. Les jeux de ce type sont appelés *jeux à point selle* ou *à col.* Dans ces jeux, les joueurs doivent s'en tenir à leurs stratégies pures qui se coupent au point selle. L'existence du point selle dans le jeu est un cas exceptionnel qu'il ne faut éventuellement pas perdre de vue.

Si $v_A = 0$ le jeu est dit équitable ou à somme nulle. Un joueur qui joue à ce jeu assez longtemps et optimalement ne perd et ne gagne rien. Si $v_A \neq 0$ le jeu est inéquitable ou à somme non nulle.

Si le joueur A ne se tient pas à ses stratégies mixtes optimales contrairement au joueur B, son gain sera inférieur à celui donné par l'expression (12.2).

Les stratégies optimales mixtes sont définies par les éléments de la matrice du jeu $[a_{ij}]$. Une variation des règlements a_{ij} entraîne généralement une variation des stratégies mixtes optimales. Toutefois la physionomie du jeu ne change pas si l'on ajoute une même valeur constante à tous les règlements ou si on les multiplie par un même nombre positif. Ces transformations ne toucheront que la valeur du jeu. Étudions cette propriété avec plus de rigueur.

Soit un jeu de matrice

$$[a_{ij}]; \quad i=1, 2, \ldots, M; \quad j=1, 2, \ldots, N.$$

La valeur du jeu qui est égale au gain moyen du joueur A sera

$$v_A = \max_x \min_y \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} a_{ij} x_i y_j.$$

Ajoutons maintenant à tous les règlements la quantité b, i.e. pour le nouveau jeu on aura $a'_{ij} = a_{ij} + b$. La valeur du nouveau jeu sera

$$v'_A = \max_x \min_y \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} (a_{ij} + b) x_i y_j =$$

$$= \max_x \min_y [b \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} x_i y_j + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} a_{ij} x_i y_j] =$$

$$= b + \max_x \min_y \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} a_{ij} x_i y_j = b + v_A.$$

De façon analogue, si l'on multiplie les règlements par $\lambda > 0$,

$$a'_{ij} = \lambda a_{ij},$$

la valeur du nouveau jeu sera

$$v'_A = \max_x \min_y \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \lambda a_{ij} x_i y_j = \lambda \max_x \min_y \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} a_{ij} x_i y_j = \lambda v_A.$$

Résoudre un jeu de dimensions $m \times n$, c'est en déterminer les stratégies mixtes optimales et la valeur. Si ce jeu ne possède pas de point selle, on s'arrange pour diminuer ses dimensions ou pour chercher un jeu carré $m \times m$ $(m < n)$ dont toutes les stratégies soient actives.

Les applications de la théorie des jeux se heurtent à des difficultés dans la détermination de paramètres assez exacts et fiables figurés ici par les règlements a_{ij}. Il est donc très important d'étudier le comportement de la solution du jeu lorsque certains règlements varient. Ce problème n'est pas étudié dans le cas général, mais on peut affirmer *a priori* que cette variation aura une influence aussi bien sur la valeur que sur la conduite du jeu. Il est en particulier très intéressant d'analyser la « sensibilité » des stratégies actives aux variations des règlements et de déterminer les valeurs critiques maximales des règlements pour lesquelles il se produit une modification des stratégies actives.

§ 2. Jeux de dimensions $2\times m$ et leur résolution sur machine

Le jeu 2×2 est le plus simple. Dans un tel jeu les stratégies optimales sont ou pures (dans ce cas le jeu possède un point selle), ou mixtes. La résolution d'un jeu $2 \times m$ peut être ramenée à celle de $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ jeux 2×2. L'analyse de ces jeux même pour m peu grand ($m \leqslant 10$) est laborieuse. Les calculateurs analogiques résolvent assez facilement et rapidement ces problèmes.

Voyons le principe de cette méthode sur un exemple numérique simple, dont nous donnerons d'abord une interprétation géométrique.

Soit un jeu de matrice

$$\begin{array}{c|ccc|} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 8 & 5 & 1 \end{array}.$$

Les chiffres arabes 1, 2 désignent les stratégies pures du joueur A, les chiffres romains I, II, III, les stratégies pures de l'adversaire B. Supposons que le joueur A utilise les stratégies mixtes x et $1 - x$. Autrement dit, x est la probabilité que le joueur A se serve de la stratégie 1 et $1 - x$ la probabilité qu'il utilise la stratégie 2.

Si le joueur B dispose de la stratégie pure I, le gain moyen escompté sera $z_{\text{I}} = 2x + (1 - x)\,8$. De façon analogue, si B emploie la stratégie pure II, le gain moyen sera $z_{\text{II}} = 3x + (1 - x)\,5$. Pour la stratégie pure III, on aura de même $z_{\text{III}} = 12x + (1 - x)$. Traçons le graphe de z_{I}, z_{II}, z_{III} sur l'intervalle $[0, 1]$. Sur la figure 12.1 la fonction polygonale $z_{\min}(x) = \min\{z_{\text{I}}(x), z_{\text{II}}(x), z_{\text{III}}(x)\}$ est représentée en plus gras. L'utilisation optimale des stratégies mixtes du joueur A est définie par la probabilité x^* que $z_{\min}(x)$ possède un maximum. Sur le graphe la valeur du jeu est donnée par l'ordonnée du point d'intersection des droites z_{II} et z_{III}, et la stratégie optimale par l'abscisse de ce point. Dans l'exemple traité, la valeur du jeu est $v_A = \frac{57}{13}$ et $x^* = \frac{4}{13}$.

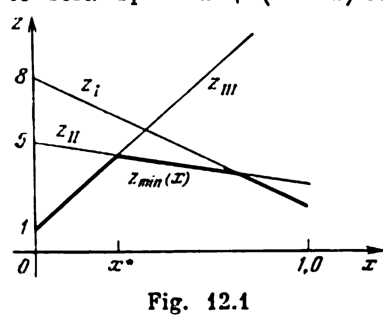


Fig. 12.1

La résolution de ce problème sur machine se fait de la manière suivante. La machine génère les fonctions $z_{\text{I}}(x)$, $z_{\text{II}}(x)$, $z_{\text{III}}(x)$ et détermine pour chaque x celle qui est minimale. Comme la fonction

polygonale $z_{\min}(x)$ est convexe, la dérivée $z'_{\min}(x)$ ne devient négative qu'à l'instant où $x = x^*$. Le changement de signe de la dérivée est utilisé pour stopper automatiquement la machine. A l'arrêt de la machine on relève la valeur $x = x^*$ et $z = \max z_{\min}(x)$.

Le schéma fonctionnel est représenté sur la figure 12.2. Il met en jeu trois intégrateurs qui délivrent les fonctions de règlement

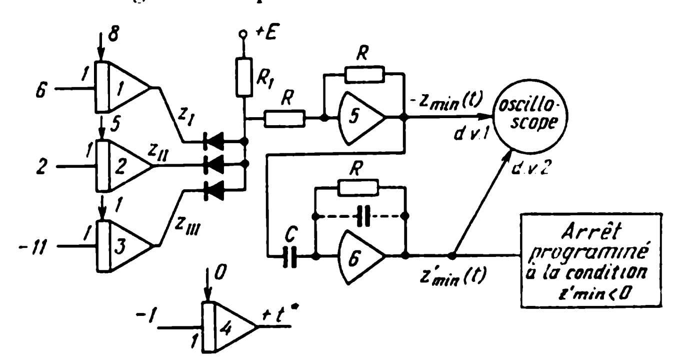


Fig. 12.2

moyen $z_{\text{I}}(t)$, $z_{\text{II}}(t)$, $z_{\text{III}}(t)$ pour les stratégies pures du joueur B. Ces fonctions sont générées à l'aide des équations différentielles déterminantes

$$\begin{aligned} z'_{\text{I}}(t) &= -6, & z_{\text{I}}(0) &= 8; \\ z'_{\text{II}}(t) &= -2, & z_{\text{II}}(0) &= 5; \\ z'_{\text{III}}(t) &= 11, & z_{\text{III}}(0) &= 1. \end{aligned}$$

La variable indépendante x est figurée par le temps t. Si les stratégies pures du joueur B étaient au nombre de m au lieu de trois, dans le schéma fonctionnel il aurait fallu changer simplement le nombre d'intégrateurs. Les sorties des intégrateurs sont appliquées aux entrées du circuit de minimisation des variables. Ce circuit est composé de trois diodes, d'un inverseur *5* et de résistances R_1 et R, $R_1 \ll R$. La tension $E > z_j$, $j = \text{I, II, III}$, est appliquée à l'entrée du circuit par l'intermédiaire de la résistance R_1. Le circuit délivre la fonction

$$-z_{\min}(t) = -\min\{z_{\text{I}}(t),\ z_{\text{II}}(t),\ z_{\text{III}}(t),\ E\} = \\ = -\min\{z_{\text{I}}(t),\ z_{\text{II}}(t),\ z_{\text{III}}(t)\}.$$

Cette fonction est dérivée ensuite par rapport à t à l'aide du dérivateur *6* dont la sortie est appliquée à l'entrée du circuit d'arrêt programmé. A l'instant où la dérivée $z'_{\min}(t)$ change de signe, ce circuit stoppe la génération des fonctions. A la sortie de l'inverseur *5*,

on enregistre la valeur du jeu $-v_A = -\max z_{\min}(t^*)$, et à la sortie de l'intégrateur *4* qui remplit les fonctions d'un mesureur du temps, la valeur t^* correspondant à la fréquence optimale de répétition de la stratégie pure I.

Lorsqu'on résout des problèmes de jeux de dimensions $2 \times m$ on n'a nul besoin de déterminer les fonctions de règlement moyen $z(t)$ et leurs équations différentielles déterminantes. Toute la programmation, y compris le choix des échelles, s'effectue par transformation de la matrice du jeu. Développons cette méthode sur l'exemple d'un jeu 2×5. Soit donnée la matrice

$$\begin{bmatrix} -6 & -1 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dans la première étape de la programmation, on choisira les échelles des données initiales. Pour cela cherchons l'élément dominant en valeur absolue de la matrice du jeu. Le nombre 7 en l'occurrence est arrondi par excès à 10 pour la commodité des calculs. La grandeur de l'échelle est donnée par l'expression standard

$$m_z = \frac{100}{10} = 10.$$

Dans la deuxième étape on multiplie la matrice du jeu par la valeur de l'échelle. On obtient

$$\begin{bmatrix} -60 & -10 & 10 & 40 & 70 \\ 70 & -20 & 60 & 30 & -20 \end{bmatrix}.$$

On rappelle que les stratégies optimales du jeu initial sont invariantes par rapport à la multiplication de la matrice du jeu. Seule varie la valeur du jeu, laquelle est multipliée par m_z. Donc la multiplication de la matrice par l'échelle est une opération admissible, puisqu'elle laisse invariantes les stratégies optimales.

Dans la troisième étape, on détermine les conditions initiales et les coefficients de transfert des intégrateurs générant les règlements moyens pour diverses stratégies pures qui sont au nombre de cinq. Pour cela on transcrit la deuxième ligne de la matrice de la deuxième étape, puis on porte sous chaque terme de cette ligne la différence entre les éléments de la deuxième et de la première ligne. En divisant cette différence par 100 on obtiendra les coefficients de transfert des intégrateurs:

$m_z z(0)$	70	—20	60	30	—20	(I)
$m_z z'$	130	—10	50	—10	—90	(II)
α	1,3	0,1	0,5	0,1	0,9	(III)

On remarque que la ligne (I) représente les conditions initiales de tous les intégrateurs à l'échelle m_z. La ligne (II) donne les valeurs des dérivées de la fonction $z(t)$ à l'échelle m_z.

Le schéma de commutation conçu pour la machine MH-7 est représenté sur la figure 12.3. Les intégrateurs *5*, *6*, *7*, *8*, *15* sont utilisés pour la génération des fonctions $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_4(t)$, $z_5(t)$. Ce schéma peut fonctionner en deux régimes selon que l'arrêt

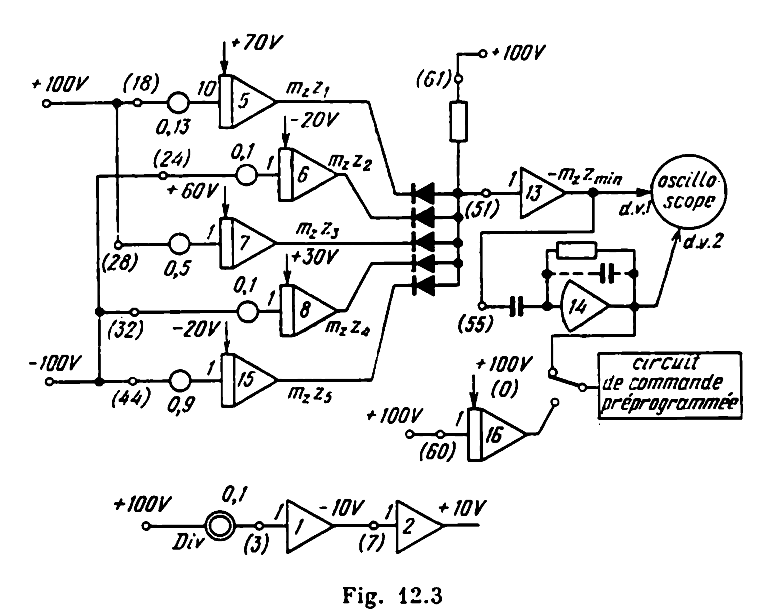


Fig. 12.3

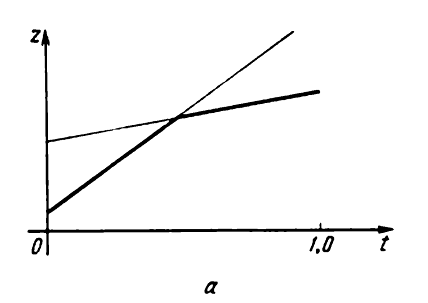
programmé à été organisé à l'aide de l'amplificateur *16* ou de l'amplificateur *14*.

Dans le premier régime qui correspond à l'organisation du stop à la condition de passage de $u_{16}(t)$ par la valeur zéro, pendant une seconde sont visibles sur l'écran de l'indicateur la fonction $m_z z_{min}(t)$ et sa dérivée sur la plage admissible [0, 1] de variation de la fréquence de répétition de la première stratégie.

Dans le deuxième régime, le stop est organisé à partir de l'amplificateur *14* à la condition de changement de signe de la fonction $z'_{min}(t)$. Le temps de génération sera en général inférieur à une seconde. L'instant d'arrêt t^* qui est compris dans l'intervalle [0, 1] est déterminé par le maximum de la fonction $z_{min}(t)$. A cette valeur t^* correspond la fréquence optimale de répétition de la première stratégie. La valeur t^* est délivrée à la sortie de l'intégrateur *16*, dont la valeur de la tension initiale (la condition initiale) doit être nulle.

On rappelle que le circuit de commande préprogrammée interrompt l'intégration non pas à l'instant même de réalisation de la condition, mais au bout d'un temps nécessaire à la réponse des circuits à relais d'arrêt de la machine. Pour atténuer l'influence du retard sur t^* et $\max z_{\min}(t)$, il faut appliquer aux entrées de tous les intégrateurs une tension non pas de 100 mais de 10 volts par l'intermédiaire du circuit composé du diviseur *Div* et des deux inverseurs *1* et *2*. Le temps de génération de la fonction $z_{\min}(t)$ sera alors de 10 secondes au lieu d'une. En mettant le problème sur un calculateur analogique, on a intérêt à étudier tout d'abord les variations de la fonction $z_{\min}(t)$ en premier régime. Puis, une fois qu'on s'est assuré de l'existence d'un seul maximum dans l'intervalle [0, 1], on passe à l'organisation du deuxième régime pour la résolution directe du problème. Cette suite d'opérations est dictée par l'existence de deux cas où le circuit de commande préprogrammée est susceptible de ne pas fonctionner.

Le premier cas correspond au jeu à point selle. Ainsi, le jeu de matrice $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ possède un point selle correspondant au gain 5.



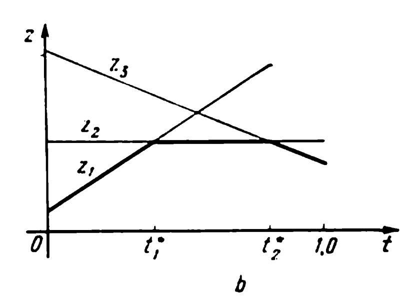


Fig. 12.4

La fonction $z_{\min}(t)$ est représentée sur la figure 12.4, *a* d'où il ressort que sur l'intervalle [0, 1] $\max z_{\min}(t)$ est atteint pour $t^* = 1$; on remarque que pour $t = 1$ la dérivée ne change pas de signe, donc l'arrêt de la machine ne peut se produire à la condition de changement de signe de la dérivée $z'_{\min}(t)$.

Le deuxième cas se présente lorsque $z'_{\min}(t)$ est de la forme représentée sur la figure 12.4, *b*, où le segment horizontal correspond à $\max z_{\min}(t)$. Il est clair que tout $t^* \in [t_1^*, t_2^*]$ assure une stratégie optimale. La machine ne s'arrête qu'aux bornes de cette plage, i.e. en t_1^* ou t_2^*. Ce cas est critique. La moindre variation du gain de la stratégie pure correspondant au gain moyen $z_2(t)$ lève cette indétermination.

§ 3. Exercices

Etant données les matrices de jeux de dimensions $2 \times m$, on demande de

1. construire le schéma de commutation générant la solution du problème;
2. résoudre le problème et le rendre à somme nulle;
3. déterminer pour les stratégies actives le domaine critique $\sigma(a_{1k}, a_{2k})$ de variation des valeurs des gains a_{1k}, a_{2k} pour lesquelles les stratégies restent actives; construire en les coordonnées a_{1k}, a_{2k} les domaines en lesquels les stratégies restent actives:

1) $\begin{bmatrix} -41 & -22 & 34 & 47 & 55 \\ 61 & 52 & 0 & 16 & 35 \end{bmatrix}$,

2) $\begin{bmatrix} 71 & 0 & 34 \\ 21 & -12 & 65 \end{bmatrix}$,

3) $\begin{bmatrix} -21 & -65 & -56 & -15 \\ -32 & -74 & -61 & -24 \end{bmatrix}$,

4) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$,

5) $\begin{bmatrix} 11 & 18 & 24 & 30 & 24 \\ 24 & 30 & 24 & 23 & 31 \end{bmatrix}$,

6) $\begin{bmatrix} 23 & 21 & 20 & 24 \\ 20 & 18 & 27 & 30 \end{bmatrix}$,

7) $\begin{bmatrix} 24 & 27 & 34 & 41 \\ 46 & 31 & 22 & 25 \end{bmatrix}$,

8) $\begin{bmatrix} 100 & 72 & 94 & 0 \\ -80 & 223 & -81 & 10 \end{bmatrix}$,

9) $\begin{bmatrix} 53 & -26 & 32 & 76 & 0 \\ 0 & 57 & 21 & 22 & 64 \end{bmatrix}$,

10) $\begin{bmatrix} 13 & -31 & 54 & -71 & 91 \\ -24 & 42 & -63 & 79 & -99 \end{bmatrix}$.

CHAPITRE 13

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE PROGRAMMATION LINÉAIRE

§ 1. Position des problèmes de programmation linéaire

Les problèmes de programmation mathématique (planification) étudient les méthodes les plus efficaces d'utilisation ou de distribution de ressources en quantité limitée afin d'en tirer le meilleur profit.

La nécessité d'élaborer la meilleure méthode de gestion (le plan) selon un certain critère se présente à tous les niveaux de l'activité humaine. Ce qui situe la portée des méthodes de la programmation mathématique.

La programmation linéaire est le cas particulier le plus simple de la programmation mathématique. Elle est caractérisée par son application aux processus décrits par des expressions algébriques linéaires. Formulons un problème général de programmation linéaire.

Supposons qu'à un instant donné une entreprise dispose d'une certaine quantité de ressources de diverse nature. Par ressources on entend les matières premières, l'équipement, le personnel, ouvriers et cadres compris. Toutes ces ressources peuvent être utilisées pour la fabrication des articles les plus divers. On connaît par ailleurs le taux de participation de la i-ème ressource dans la fabrication du j-ème article, ainsi que le bénéfice réalisé par la vente de chaque unité d'articles du type j. Il faut planifier le fonctionnement de l'usine de telle manière que la nomenclature d'articles produits assure le bénéfice maximal.

Mettons ce problème en équation. Soient m le nombre de types de ressources ; n le nombre des divers articles, a_{ij} le nombre d'unités de la i-ème ressource nécessaire à la production d'un article j ; b_i le nombre maximal d'unités de la i-ème ressource disponibles à l'usine ; c_j le bénéfice réalisé sur un article j ; x_j le plan de production de l'article j. La collection de nombres $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est appelée plan général de production.

Le plan général doit être compatible avec les ressources utilisées, i.e. la quantité de ressource i mise en jeu par le plan ne doit pas excéder b_i. Autrement dit, pour la ressource i on a l'inégalité linéaire

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i.$$

Dans cette inégalité, x_j négatifs n'ont pas de sens, donc on admettra que $x_j \geqslant 0$ pour tous les $j = 1, 2, \ldots, n$. Le bénéfice tiré de la réalisation de x_j unités de l'article j sera égal à $c_j x_j$. Le bénéfice total réalisé sur tous les articles vaut $z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Le problème de programmation linéaire consiste à trouver le plan admissible $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui maximise la fonction revenu $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Donc, la planification optimale de la production se traduit sur le plan mathématique par le choix d'un système de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant les inégalités

$$\begin{aligned} &x_j \geqslant 0; \qquad j=1, 2, \ldots, n; \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{13.1}$$

et tel que la forme linéaire

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{13.2}$$

soit maximale.

En programmation linéaire, on a souvent affaire à des problèmes dont les valeurs initiales des paramètres sont affectées d'erreurs. Il est donc très important d'étudier le comportement de la solution pour une certaine variation des données initiales. Cette étude fait l'objet d'un chapitre à part, encore mal développé, appelé programmation linéaire paramétrique.

Lorsqu'on résout des problèmes de programmation linéaire sur un calculateur analogique on peut toujours, moyennant une transformation convenable des coefficients de transfert des opérateurs, étudier la sensibilité du plan optimal aux variations des paramètres numériques du problème.

§ 2. Méthodes du gradient

Les problèmes de programmation linéaire peuvent être résolus de façon efficace sur machine à l'aide des méthodes du gradient de détermination des extrémums de fonctionnelles en présence de conditions (§ 4, chapitre 10).

Introduisons les notations suivantes pour faciliter le choix des échelles des variables mathématiques figurant dans (13.1) et (13.2):

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\alpha_j}, \tag{13.3}$$

$$g_i(x) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\alpha_{ij}} \geqslant 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m, \quad x_j \geqslant 0, \tag{13.4}$$

où

$$\alpha_j = \frac{1}{c_j}; \quad \alpha_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Cherchons tout d'abord la première variante des équations de gradient. Utilisons à cet effet la fonctionnelle auxiliaire (10.82), i.e.

$$I(x) = \gamma z(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i^2(x) \operatorname{sign} g_i(x).$$

En tenant compte de (13.3), (13.4) et (10.83), on obtient le système d'équations différentielles cherché

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\gamma}{\alpha_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\alpha_{ij}} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\alpha_{ij}}\right) \operatorname{sign} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\alpha_{ij}}\right); \tag{13.5}$$

$$x_j \geqslant 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dans l'expression (13.5) on n'a pas tenu compte des contraintes $x_j \geqslant 0$, car en vertu du § 4, chapitre 10, leur réalisation sur machine est facilement accessible. Elle nécessite une seule contre-réaction supplémentaire, sous forme de diode, bouclant l'amplificateur opérationnel qui délivre la variable x_j.

Si l'on se sert de la fonctionnelle auxiliaire (10.84), i.e.

$$I(x) = \gamma z(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i |g_i(x)| \operatorname{sign} g_i(x),$$

on obtient la deuxième variante des équations différentielles de gradient qui donne la solution du problème (13.3):

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\gamma}{\alpha_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\alpha_{ij}} \operatorname{sign} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\alpha_{ij}}\right), \tag{13.6}$$

$$x_j \geqslant 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

§ 3. Exemple

Illustrons sur un exemple simple la méthode de programmation des calculateurs analogiques pour la résolution des problèmes de programmation linéaire.

On demande le circuit de maximisation de la forme linéaire

$$z = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4}$$

avec les contraintes

$$g_1(x_1, x_2) = -1 + x_1 + x_2 \geqslant 0; \quad g_2(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{5} \geqslant 0;$$

$$g_3(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{3} \geqslant 0; \quad x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Le système de contraintes est vérifié par les sommets du pentagone convexe représenté sur la figure 13.1.

Pour résoudre ce problème nous allons nous servir de la fonctionnelle (10.82) qui, en vertu de (13.5), conduit au système d'équations différentielles de plus rapide montée

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\gamma}{3} - \lambda\left(g_1 \operatorname{sign} g_1 - \frac{1}{2} g_2 \operatorname{sign} g_2 - \frac{1}{4} g_3 \operatorname{sign} g_3\right);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\gamma}{4} - \lambda\left(g_1 \operatorname{sign} g_1 - \frac{1}{5} g_2 \operatorname{sign} g_2 - \frac{1}{3} g_3 \operatorname{sign} g_3\right); \quad (13.7)$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0; \quad x_1(0) = x_{10}; \quad x_2(0) = x_{20}.$$

Le schéma de commutation correspondant à (13.7) est représenté sur la figure 13.2. Il assure la résolution de (13.7) dans la position des contacts du relais opérationnel qui est représentée sur le schéma. Le choix des échelles des variables mathématiques s'effectue à l'aide du potentiomètre disposé à l'entrée *4* de l'inverseur *1*. Une unité de constante mathématique correspond à 20 V de tension électrique. Le coefficient γ est donné par le potentiomètre à l'entrée *16* de l'inverseur *4*. Les termes $\lambda g_i \operatorname{sign} g_i$ ($i = 1, 2, 3$) des seconds membres des équations (13.7) sont réalisés à l'aide des amplificateurs opérationnels *11*, *9*, *10* à contre-réaction à travers des diodes. Les contraintes $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$ sont générées par les inverseurs *2* et *3* à contre-réaction à travers des diodes. Les trajectoires du point représentatif pour diverses valeurs x_{10}, x_{20} sont représentées sur la figure 13.3. Les trajectoires présentent des cassures aux points situés sur les droites-contraintes.

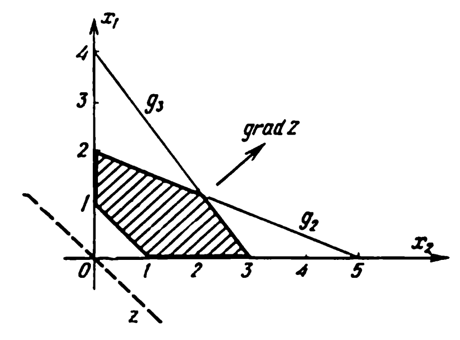
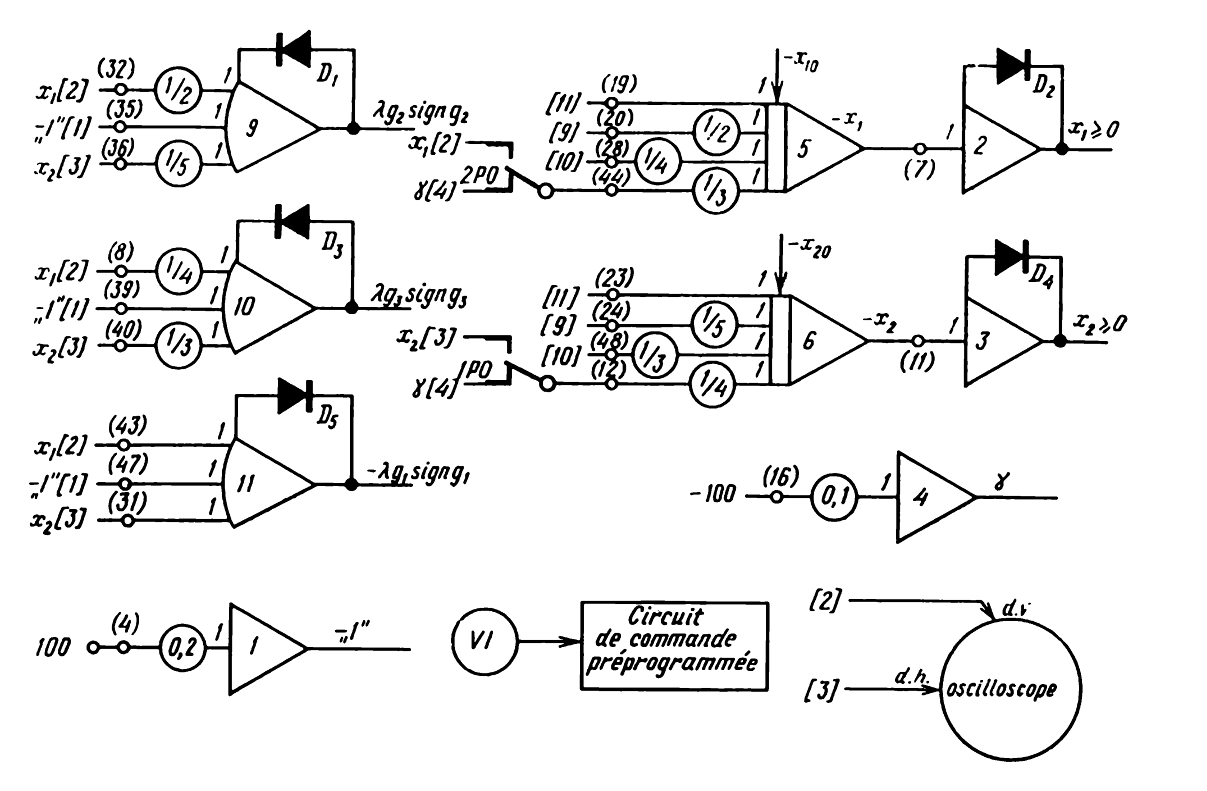


Fig. 13.1



x1[2]
„-1"[1]
x2[3]
(32)
(35)
(36)
1/2
1/5
9
D1
λg2 sign g2
(8)
(39)
(40)
1/4
1/3
10
D3
λg3 sign g3
(43)
(47)
(31)
11
D5
-λg1 sign g1
2PO
γ[4]
x2[3]
1PO
[11]
[9]
[10]
(19)
(20)
(28)
(44)
(23)
(24)
(48)
(12)
-x10
-x20
5
6
-x1
-x2
(7)
(11)
2
3
D2
D4
x1 ≥ 0
x2 ≥ 0
-100
(16)
0,1
4
γ
100
(4)
0,2
„-1"
VI
Circuit de commande préprogrammée
[2]
[3]
d.v
d.h.
oscilloscope

Fig. 13.2

Le problème de programmation linéaire, résolu à l'aide du schéma 13.2, peut être généralisé. En effet, si l'on change le signe de la cons-

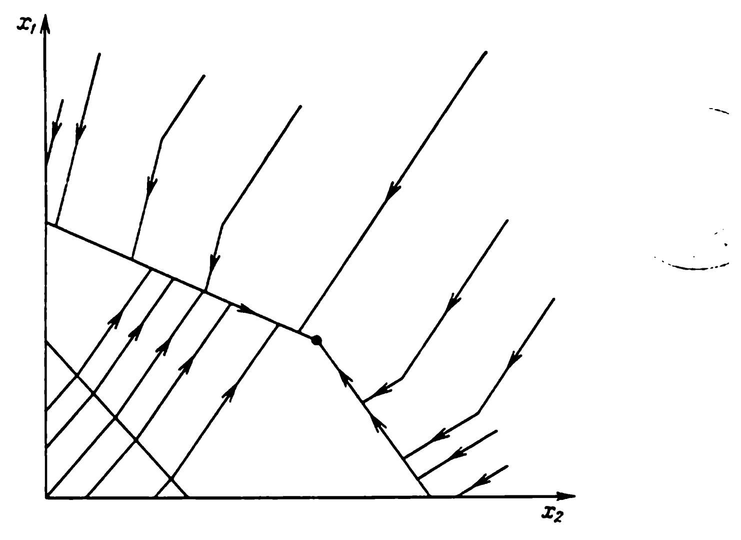


Fig. 13.3

tante à l'entrée du circuit de commande préprogrammée, la machine commence à maximiser la forme quadratique

$$\tilde{z}=\frac{x_1^2}{6}+\frac{x_2^2}{8}$$

avec le même système de contraintes.

§ 4. Exercices

Composer pour le calculateur analogique MH-7 les schémas de commutation de résolution des problèmes suivants de programmation linéaire. Visualiser la solution sur l'écran de l'indicateur, veiller au régime de glissement. Etudier la sensibilité du plan optimal à une variation de 10 %, 15 % et 20 % des caractéristiques numériques de la forme linéaire à optimiser

1. $z = 4x_1 + 2x_2 \to (\max)$;

$$3x_2 - x_1 \leqslant 9;\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 18;$$
$$2x_1 - x_2 \leqslant 10;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

2. $z = 3x_1 + 4x_2 \to (\max)$;

$$3x_1 + 15x_2 \leqslant 15;\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 10;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

3. $z = 2x_1 + 3x_2 \to (\max)$;

$$3x_1 + 4x_2 \leqslant 6;\ x_1 + x_2 \geqslant 1;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

4. $z = 2x_1 + 3x_2 \to (\min)$;

$$3x_1 + 2x_2 \geqslant 6;\ x_1 + 4x_2 \geqslant 4;\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

5. $z = 6x_1 + 4x_2 \to (\min)$;

$$2x_1 + x_2 \geqslant 3;\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2;$$

$$3x_1 + x_2 \geqslant 0;\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 1;$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

ANNEXE

DESCRIPTION SOMMAIRE DU CALCULATEUR ANALOGIQUE MH-7

Destination et caractéristiques. Le calculateur analogique MH-7 est orienté vers l'étude des processus physiques, décrits par des équations différentielles non linéaires d'ordre non supérieur à six.

La figure A.1 nous donne une vue générale de la machine. L'ensemble du calculateur MH-7 est composé d'un bloc principal MH-7, d'un bloc d'alimentation ЭСВ-6, d'un indicateur cathodique И-5M, de cordons de connexion et de cavaliers.

Les opérateurs sont construits sur la base d'un amplificateur opérationnel à courant continu à gain élevé. Le bloc principal de la machine comporte 18 amplificateurs opérationnels, 10 condensateurs, des résistances, des diodes, des générateurs de fonctions amovibles, des multiplieurs. En combinant de diverses façons ces éléments et opérateurs avec l'AO on obtient des circuits permettant d'effectuer les différentes opérations mathématiques: addition, intégration, dérivation, multiplication, génération de fonctions de la forme $y = \varphi(x)$ et certaines opérations logiques.

La connexion de l'AO avec les éléments ou les opérateurs s'effectue sur le panneau de commutation situé en haut de la machine, auquel aboutissent les entrées et sorties des opérateurs.

Le bloc principal du calculateur MH-7. Le bloc principal est constitué d'amplificateurs opérationnels, d'un panneau de commutation avec les éléments des circuits d'entrée et des circuits de contre-réaction, d'un jeu de circuits d'entrée amovibles pour la formation de générateurs de fonctions et de multiplieurs, d'un circuit de commande, de contrôle et de signalisation.

1. Des 18 amplificateurs opérationnels, 16 sont utilisés pour les opérations de calcul, les deux autres assument des fonctions spéciales dans le circuit de commande et de contrôle de la machine. Les amplificateurs opérationnels du calculateur MH-7 sont des amplificateurs de courant continu du type УПТ-4 présentant les caractéristiques suivantes:

— gain sans contre-réaction: supérieur à 40 000;

— dérive de la tension de sortie ramenée à l'entrée: non supérieure à ± 3 mV en 10 mn lorsque l'amplificateur travaille en inver-

17—0654

seur; non supérieure à ± 120 mV en 100 s pour $RC = 1$, en mode intégration;

— tension de sortie: comprise entre —100 V et +100 V;

— charge minimale: 10 kΩ (avec une résistance d'anode supplémentaire dans l'étage de sortie).

2. Le panneau de commutation est situé dans la partie supérieure du bloc principal. Son schéma de principe est représenté sur la figure A.2.

Le panneau de commutation sert à:

— la commutation des circuits des opérateurs (pour la réalisation d'opérations mathématiques linéaires et non linéaires);

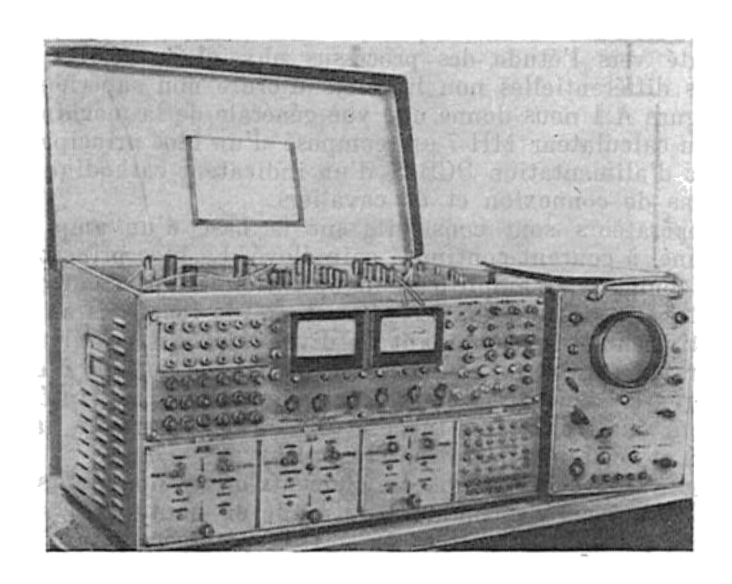


Fig. A.1

— la connexion des opérateurs en vue de la résolution d'un problème d'après son schéma de commutation;

— la composition de circuits auxiliaires servant à la mesure du temps et des tensions électriques.

Par ailleurs le panneau de commutation est utilisé pour l'affichage des coefficients de transfert des opérateurs.

Les amplificateurs opérationnels sont symbolisés sur le panneau de commutation par des triangles numérotés de 1 à 16.

La première colonne d'AO à partir de la gauche (1 à 4) et les circuits d'entrée et de contre-réaction sont destinés à la formation d'amplificateurs d'échelle et de sommateurs. L'entrée de chaque AO est reliée à six bornes montées en parallèle. Chaque amplificateur

possède quatre entrées : deux sous forme de résistances fixes, deux sous forme de potentiomètres. Par ailleurs chaque AO renferme deux résistances dans le circuit de contre-réaction, qui sont branchées à la grille au moyen de cavaliers. On peut connecter à l'entrée de tout amplificateur une résistance quelconque d'un autre amplificateur à l'aide d'un cordon de commutation.

La deuxième colonne d'amplificateurs opérationnels (5 à 8) est destinée à la constitution d'intégrateurs, de sommateurs intégrateurs et de sommateurs. Les circuits de contre-réaction de ces amplificateurs peuvent recevoir, moyennant des tumblers, soit un condensateur (de 1μF) soit une résistance (de 1MΩ).

La troisième colonne d'amplificateurs opérationnels (9 à 12) remplit les mêmes fonctions que la première.

La quatrième colonne (13 à 16) permet d'organiser divers opérateurs, en l'occurrence des opérateurs de dérivation par les entrées 55 à 58, des sommateurs intégrateurs sur la base des AO 15 et 16, des sommateurs sur la base des AO 13 à 16.

L'amplificateur 17 est utilisé dans le circuit de tension d'étalonnage ou dans le circuit de commande préprogrammée. L'amplificateur 18 sert de base à une source de tension de —100 V.

Les rectangles $Б_1$ à $Б_4$ gravés sous les symboles des amplificateurs figurent les blocs de générateurs de fonctions et les multiplieurs. Ils sont munis de douilles d'entrée et de sortie auxquelles on branche, au moyen de cordons de commutation, les entrées ou les sorties des divers AO en vue de former les générateurs de fonctions et les multiplieurs nécessaires.

Pour la constitution des divers opérateurs à diodes on a disposé dans la partie droite du panneau de commutation 8 diodes dont les anodes et les cathodes aboutissent aux douilles du panneau de commutation. A côté des diodes sont situés quatre paires de potentiomètres qui permettent de régler la tension « +E » et « —E » entre 0 et 100 V et de la débiter à l'endroit voulu du circuit.

Au centre du panneau, entre les colonnes d'amplificateurs, on a placé 6 douilles de charges anodiques auxiliaires de 50 kΩ (3 douilles) et de 20 kΩ (les 3 autres).

La connexion des entrées et sorties des opérateurs en vue de réalisation des schémas de commutation s'effectue dans la partie gauche du panneau de commutation, sur le champ de composition.

Au centre du champ de composition on trouve 64 douilles qui sont l'aboutissement des circuits d'entrée des AO (1 à 16). Ces douilles sont placées dans un rectangle portant l'inscription ВХОДЫ (ENTRÉES). Le rectangle qui porte l'inscription ВЫХОДЫ (SORTIES) contient les bornes de sortie des 16 amplificateurs. Pour faciliter les commutations, la sortie de chaque amplificateur est reproduite en quatre exemplaires. Outre les sorties des amplificateurs on a disposé ici des douilles auxiliaires où l'on recueille des

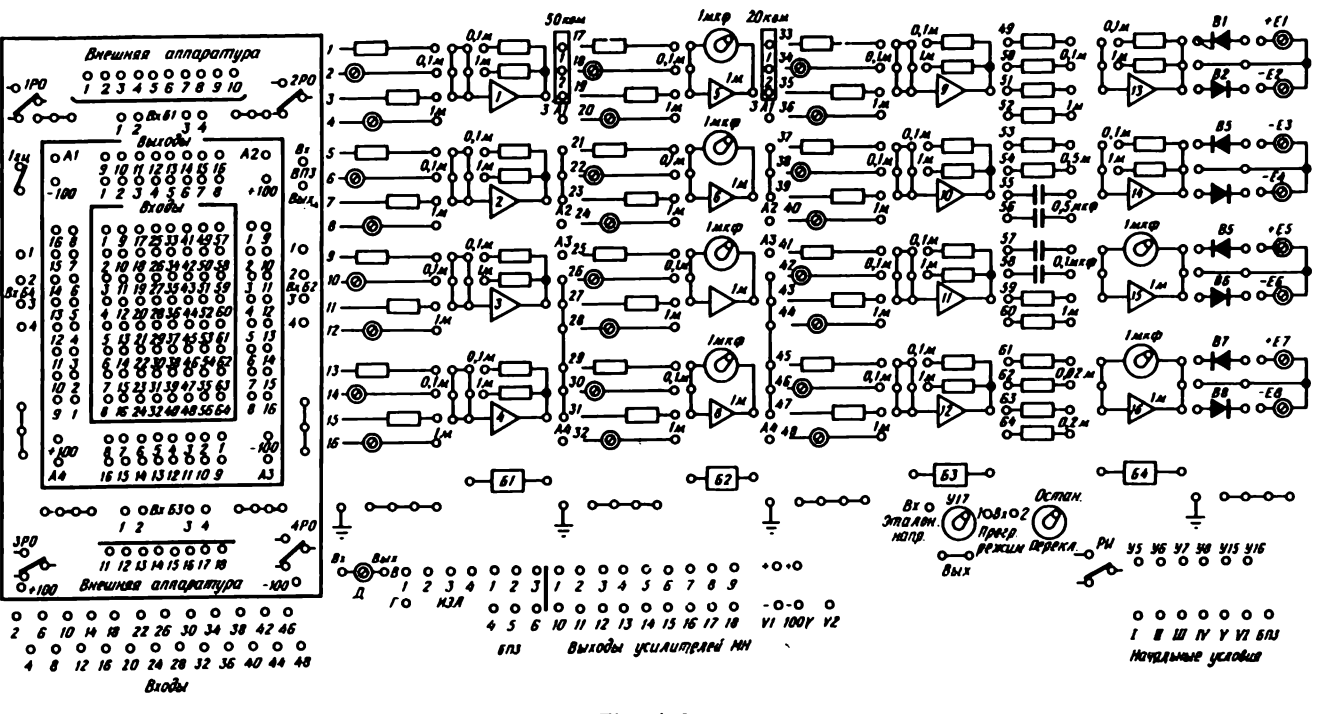

Внешняя аппаратура
Выходы
Входы
Выходы усилителей МН
Начальные условия
Эталон. напр.
Останов.

Fig. A.2

Начальные условия	Conditions initiales	100 В	100 V
Внешняя аппаратура	Appareils extérieurs	В	V (vertical)
Выходы	Sorties	Г	H (horizontal)
Входы	Entrées	М	MΩ (mégohm)
Выходы усилителей	Sorties des amplificateurs	мкф	μF (microfarad)
Эталон. напр.	Tension étalonnée	ком	kΩ (kiloohm)
Прогр. режим	Mode programmé	гц	Hz (hertz)
Остан.	Arrêt	НЭЛ	Indicateur électronique (oscilloscope)
Перекл.	Commutation	У1, . . ., У18	A1, . . ., A18 (amplificateurs)
Вых.	Sor.	Д	D (diviseur)
Вх.	Ent.	РН	relais
Б1, Б2, Б3, Б4	B1, B2, B3, B4 (bloc .	РО	relais

tensions +100 V et —100 V et les douilles A_1 à A_4 reliées par des câbles électriques aux douilles homologues situées aux divers endroits du panneau de commutation.

Le cadre extérieur contient des douilles d'entrée (à raison de quatre par entrée) d'opérateurs non linéaires amovibles (BxБ1 à BxБ4), les douilles ВХОД et ВЫХОД (ENTRÉE et SORTIE) du bloc de retard et 18 douilles ВНЕШНЯЯ АППАРАТУРА (APPAREILS EXTÉRIEURS) pour le branchement d'autres appareils ou pour le fonctionnement en commun avec un autre calculateur analogique. On trouve ici les douilles 1PO à 4PO reliées aux contacts de commutation des relais PO qui peuvent être utilisés pour les divers commutations programmées; les deux douilles « 1Гц » (1 hertz) permettent de débiter des impulsions d'une fréquence de 1 Hz.

Au bas et à gauche du panneau de commutation sont disposées 24 douilles ВХОДЫ (ENTRÉES) numérotées 2, 4, 6, . . ., 48. Ce sont les douilles d'entrée des potentiomètres destinés au réglage des coefficients de transfert des opérateurs. Les potentiomètres en question sont placés sur le panneau de commutation avant les symboles des amplificateurs et sont désignés par les mêmes numéros.

A droite des douilles ВХОДЫ (ENTRÉES) est représenté le symbole du diviseur de tension sous forme d'un cercle avec l'inscription Д (D) à l'intérieur et deux douilles: une d'entrée BX et une de sortie ВЫХ. Les douilles ИЭЛ sont destinées à la connexion des entrées de l'indicateur électronique.

Les 18 douilles ВЫХОДЫ УСИЛИТЕЛЕЙ МН-7 (SORTIES DES AMPLIFICATEURS) situées au bas et au centre du panneau servent à la connexion des sorties des amplificateurs aux voltmètres V1 (douilles « + » et « — ») et V2. A côté sont disposées les douilles des sources de tension ±100 V. A droite des douilles des voltmètres V1 et V2 on trouve deux tumblers : ЭТАЛОННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ— ПРОГРАММНЫЙ РЕЖИМ (TENSION ÉTALONNÉE — MODE PROGRAMMÉ) et ОСТАНОВ — ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ (ARRÊT — COMMUTATION) pour le choix du mode de fonctionnement du circuit de commande. A côté du premier tumbler sont disposées des douilles BX pour le réglage de la tension étalonnée, deux douilles d'entrée (« 1 » et « 2 ») pour le choix du mode programmé et deux douilles ВЫХ (SORTIE).

A droite du deuxième tumbler on trouve trois douilles qui représentent les contacts du relais РИ.

Les douilles У5, У6, У7, У8, У15, У16 et I, II, III, IV, V, VI НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ (CONDITIONS INITIALES) qui sont situées dans la partie droite du panneau de commutation servent à donner les conditions initiales.

On trouve également sur le panneau de commutation quelques groupes de douilles anonymes reliées par un trait (les répétiteurs)

et des douilles de mise à la masse destinées à faciliter la commutation des divers opérateurs.

3. Le circuit de commande, de contrôle et de signalisation est destiné à régler, contrôler et commander les opérateurs et les amplificateurs. Il contient les blocs de commande; de réglage du zéro et de contrôle de l'AO; de donnée des conditions initiales et des perturbations constantes ainsi que d'autres blocs.

Les principaux éléments de commande et de contrôle aboutissent au panneau de commande (1) (fig. A.3).

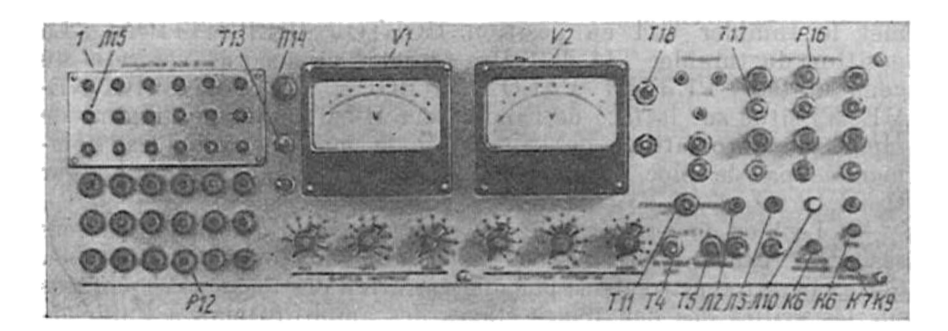


Fig. A.3

1) Le bloc de commande sert à la mise en marche de la machine et au réglage des modes suivants: УСТАНОВКА НУЛЕЙ (RÉGLAGE DES ZÉROS), ПОДГОТОВКА (PRÉPARATION), РАБОТА (CALCUL).

Toutes les opérations préparatoires, y compris la composition du schéma de commutation du problème, sont effectuées machine en marche. Les blocs d'alimentation ЭСВ-6 s'alimentent sur secteur alternatif de 220 V. Pour cela il faut fermer les tumblers « 220 V » et « = 26 V ». A la suite de cette manœuvre s'allument les lampes de signalisation Л2, Л3 (L2 et L3) respectivement. Dès que le tumbler « = 26 V » est fermé, la source d'alimentation débite une tension continue de 26 V dans les relais électromécaniques du circuit de commande.

Les tumblers T4, T5 et T11 servent au choix du mode de fonctionnement de la machine.

En mode ПОДГОТОВКА (PRÉPARATION) on compose le schéma de commutation du problème posé, on établit les coefficients de transfert des opérateurs, on règle les générateurs de fonctions. Le tumbler T4 est en position РАБОТА (CALCUL), le tumbler T5 en position ПОДГОТОВКА (PRÉPARATION).

En mode РАБОТА (CALCUL) on donne les conditions initiales, les perturbations constantes et on résout le problème posé. Les

tumblers T4 et T5 sont tous deux en position РАБОТА (CALCUL). La machine est mise en marche par pression sur le bouton-poussoir K6 ПУСК (MARCHE).

Si le problème posé est à résoudre en une seule fois on fait appel au tumbler T11 que l'on met en position ОДНОКРАТ (MONO-COURSE). En ce mode la machine est commandée par un opérateur humain. Le bouton-poussoir K7 ОСТАНОВ (ARRÊT) commande l'arrêt de la machine; le bouton-poussoir K8 ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ (INITIALISATION) ramène la machine à l'état initial.

Si l'on veut que la solution soit reproduite plusieurs fois on met le tumbler T11 en position ПОВТОР (RÉPÉTITION). La position du tumbler T11 doit être toujours en accord avec celle du commutateur РЕЖИМ РАБОТЫ (MODE DE FONCTIONNEMENT) situé sur la face de l'indicateur И-5M, puisqu'en régime de répétition automatique de la solution la machine MH-7 est commandée par le bloc de programme se trouvant dans l'indicateur И-5M.

2) Le bloc de réglage des zéros et de contrôle des amplificateurs assure la remise à zéro de tous les 18 amplificateurs opérationnels. Cette opération est réalisée par une variation des tensions appliquées sur les grilles des deuxièmes étages des amplificateurs à l'aide de 18 boutons (P12) des potentiomètres marqués УСТАНОВКА НУЛЕЙ УСИЛИТЕЛЕЙ (RÉGLAGE ZÉROS AMPLIFICATEURS). Pour contrôler les zéros des amplificateurs, on se sert de l'instrument à aiguille V1 à trois calibres de mesure. Le tumbler T13 ИЗМЕРЕНИЕ — КОМПЕНСАЦИЯ (MESURE — COMPENSATION) placé à gauche de l'instrument doit occuper la position ИЗМЕРЕНИЕ (MESURE). La borne « — » de l'instrument est alors automatiquement mise à la masse. La deuxième borne est reliée à la douille +V1 du panneau de câblage.

Pour le réglage des zéros, les amplificateurs sont branchés, l'un après l'autre, avec un cordon de commutation, à la douille +V1. Le réglage s'effectue d'abord sur l'échelle 2,5 V pour être précisé sur l'échelle 0,1 V. La commutation des échelles est réalisée par le commutateur П14.

Les 18 lampes à néon Л15 (L15) branchées aux sorties des amplificateurs à travers des diviseurs haute impédance avertissent l'usager si les tensions de sortie des amplificateurs quittent la plage ±100 V. Les lampes s'allument dès que la tension contrôlée atteint ±105 V.

3) Le circuit de donnée des conditions initiales et des perturbations constantes est doté de 6 potentiomètres dont les boutons (P16) ont accès au panneau de commande 1. Une tension de 100 V est appliquée en permanence sur les potentiomètres. Le signe de la tension est choisi à l'aide du tumbler T17. Les curseurs des potentiomètres aboutissent aux douilles du panneau de commutation. Ces douilles sont reliées par des cordons de commutation aux entrées

des amplificateurs d'intégration auxquelles sont appliquées les conditions initiales (douilles У5, У6, У7, У8, У15 et У16).

Le circuit de donnée des conditions initiales permet d'appliquer des perturbations constantes à n'importe quelle entrée des opérateurs. Le contrôle de la donnée des conditions initiales et des perturbations s'effectue par une méthode de compensation à l'aide de l'instrument à aiguille V1 dont le zéro se trouve au milieu de l'échelle, ou bien à l'aide de l'instrument à aiguille V2 dont le zéro est à gauche de l'échelle, si la précision de +1 % suffit. Le tumbler T18 permet de changer les calibres de mesure (100 V et 10 V), le tumbler T19 définit la polarité « + » ou « — » de la tension mesurée.

4) Le circuit de mesure d'après la méthode de compensation met en œuvre le schéma de la figure 2.9 complété par une source de tension étalonnée (l'amplificateur У17 avec une résistance à trois décades dans le circuit de contre-réaction) et par le voltmètre V1 (le tumbler T13 MESURE — COMPENSATION est en position COMPENSATION). Si l'entrée de l'amplificateur У17 reçoit une tension de 100 V, on peut obtenir à sa sortie une tension quelconque comprise entre 0 et +100 V tous les 0,1 V. Pour effectuer les mesures on applique à l'une des bornes de V1 la tension de sortie de l'amplificateur У17 (en respectant la polarité), et à l'autre borne la tension mesurée. L'amplificateur est mis au mode TENSION ÉTALONNÉE à l'aide du tumbler correspondant sur le panneau de commutation de la machine.

Marche à suivre pour la résolution des problèmes sur la machine.

1. Mise sous tension. Fermer les tumblers « 220 V » et « 26 V ». Les lampes de signalisation Л2 et Л3 s'allument aussitôt.

2. Commutation des circuits des opérateurs. Placer les tumblers T4 et T5 respectivement dans les positions RÉGLAGE ZÉRO et PRÉPARATION. La commutation des opérateurs consiste à brancher aux amplificateurs de courant continu les circuits d'entrée de contre-réaction dont les numéros sont indiqués dans le schéma de commutation. La commutation s'effectue avec des cavaliers et des cordons de connexion.

3. Réglage des zéros des amplificateurs. Même position des tumblers T4 et T5 que dans le point 2. Le réglage des zéros s'effectue à l'aide des 18 boutons P12 des résistances variables. Pour le contrôle on utilise le voltmètre V1 (avec le zéro central). Le tumbler T13 doit être en position MESURE. Pour le réglage des zéros les sorties de tous les amplificateurs sont connectées successivement par des cordons de connexion à la douille +V1. Le réglage s'effectue sur l'échelle 2,5 V et est précisé sur l'échelle 0,1 V. La commutation des échelles est réalisée par le commutateur П14.

4. Commutation des opérateurs. La commutation est opérée avec des cordons de connexion sur le champ de composition dans la partie

gauche du panneau de commutation où aboutissent les entrées (64 douilles) et les sorties des amplificateurs. Les tumblers T4 et T5 sont dans la position des pp. 2 et 3.

5. Affichage des coefficients de transfert des sommateurs et intégrateurs. Les tumblers T4 et T5 sont respectivement en positions CALCUL et PRÉPARATION.

Les coefficients de transfert 0,1 ; 0,2; 0,5; 1 ; 2; 5; 10 des sommateurs et 1 ; 10 des intégrateurs sont affichés au moyen d'une commutation adéquate des résistances des circuits d'entrée et de contre-réaction des amplificateurs. Si les coefficients de transfert ont d'autres valeurs leur affichage s'opère par l'intermédiaire des potentiomètres dont les entrées portent des numéros pairs. Pour faciliter l'affichage des coefficients on a disposé les douilles d'entrée correspondantes dans la partie gauche et en bas du champ de composition. La rangée supérieure de douilles numérotées 2, 6, 10, 14, 18, . . ., 46 sert à l'affichage des coefficients de transfert entre 0 et 10, la rangée inférieure de douilles 4, 8, 12, 16, 20, . . ., 48, entre 0 et 1.

Si l'on a à afficher un coefficient de transfert compris entre 0 et 10 (pour fixer les idées, 6) on prélève sur le diviseur de tension Д (D) une tension de 10 V qu'on amène sur la douille correspondante (18, s'il s'agit de l'intégrateur 5). A la sortie de l'intégrateur 5, la tension est mesurée par l'un des voltmètres. Le curseur du potentiomètre est déplacé à l'aide d'un tournevis introduit dans la fente du potentiomètre.

La position dans laquelle la tension de sortie de l'intégrateur est égale à 60 volts correspond au coefficient de transfert 6 donné. Lorsque le coefficient de transfert est compris entre 0 et 1 on agit de même, sauf que la tension appliquée à l'entrée est de 100 V et non plus de 10 V.

6. Donnée des conditions initiales des intégrateurs. Les tumblers T4 et T5 sont dans la position CALCUL. Les douilles des intégrateurs У5, У6, У7, У8, У15, У16 qui sont situées en bas et à droite du panneau de commutation, sont reliées par des cavaliers ou des cordons de connexion aux sorties des potentiomètres I, II, III, IV, VI. Les sorties de chacun des intégrateurs sont branchées successivement par un cordon de connexion à l'un des voltmètres. En déplaçant les curseurs des potentiomètres P16 CONDITIONS INITIALES on obtient à la sortie de chaque potentiomètre la valeur désirée. La polarité de la tension est définie par le tumbler T17.

7. Mise en marche de la machine et résolution du problème. Les tumblers T4 et T5 sont dans la position CALCUL comme au point 6.

1) Lorsque le problème est résolu une seule fois le tumbler T11 doit occuper la position MONOCOURSE, laquelle position doit correspondre à celle du commutateur de modes de fonctionnement de l'indicateur électronique И-5M. La machine est mise en marche par

pression du bouton-poussoir K6 ПУСК (MARCHE). En même temps s'allume la lampe de signalisation Л9.

En vue d'interrompre la résolution pour « geler » les valeurs des variables machine on enfonce le bouton-poussoir K7 ОСТАНОВ (ARRÊT); la lampe de signalisation Л9 s'éteint aussitôt. Si l'on pousse de nouveau le bouton-poussoir K6 la résolution reprend à partir de l'instant où elle a été interrompue. Le bouton K8 ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ (INITIALISATION) ramène la machine à l'état initial; la lampe Л9 s'éteint, la lampe Л10 s'allume.

2) S'agissant d'une résolution répétée, la position RÉPÉTITION du tumbler T11 doit être en accord avec la position respective du commutateur de modes de fonctionnement de l'indicateur И-5M. Celui-ci doit être mis au РЕЖИМ 2 (MODE 2). Dès cet instant la résolution est reprise automatiquement par la machine.

8. Visualisation et enregistrement des variables machine à l'aide de l'indicateur И-5M et des voltmètres V1 et V2.

1) Pour visualiser les variables machine et les observer dans le temps on relie les sorties appropriées des opérateurs aux entrées B1 et B2 (plaques de déviation verticale) de l'indicateur. Ces entrées sont disposées en bas et à gauche du panneau de commutation. Si l'on veut observer simultanément sur l'écran la variation de deux variables machine, on fermera le tumbler КОММУТАТОР (COMMUTATEUR) situé sur le panneau de l'indicateur.

Quel que soit le mode de fonctionnement de la machine, MONOCOURSE ou RÉPÉTITION, la durée du balayage de l'indicateur doit être réglée légèrement supérieure au temps de résolution (durée maximale du balayage: 250 s; durée maximale recommandée de résolution: pas plus de 150 s).

2) Pour l'observation des variables machine $u_1 = \varphi_1(u_3)$, $u_2 = \varphi_2(u_3)$ en fonction d'une troisième variable machine u_3, on relie les sorties appropriées des opérateurs avec les entrées verticales 1 et 2 de l'indicateur. Sur les plaques de déviation horizontale on applique la variable u_3. L'observation ne peut se faire qu'en mode MONOCOURSE. Le commutateur de durée du balayage doit occuper la position extrême gauche. Les échelles des variables observées sur l'écran doivent être concordées. Pour ce faire on procède comme suit: sur l'entrée verticale d'abord et sur l'horizontale ensuite, on applique une tension constante, de 100 V pour fixer les idées, puis en tournant les boutons des échelles de x et de y on s'arrange pour obtenir le même écart horizontal et vertical du rayon.

3) Les valeurs des variables machine sont enregistrées au moyen des voltmètres. Pour cela, la résolution doit être interrompue soit à la main, soit automatiquement. Les tensions électriques sont mesurées par la méthode directe ou par la méthode de compensation. L'interruption automatique de la résolution s'effectue au moyen du circuit d'arrêt programmé.

BIBLIOGRAPHIE

ARNOLD V. — Equations différentielles ordinaires (traduit du russe). Mir, 1974.
BEKEY G., KARPLUS W. — Hybrid Computation. New York, 1967.
COLLATZ L. — Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, 1951.
DÉMIDOVITCH B., MARON I. — Eléments de calcul numérique (traduit du russe). Mir, 1973.
ELSGOLTS L. — Differential Equations and the Calculus of Variations (traduit du russe). Mir, 1976.
ÉMMANUEL N., KNORRE D. — Cours de cinétique chimique (traduit du russe). Mir, 1975.
KAFAROV V. — Méthodes cybernétiques et technologie chimique (traduit du russe). Mir, 1973.
KAMKE E. — Differentialgleichungen. Berlin, 1943.
KEMENY J., SNELL J. L. — Mathematical models in the social sciences, 1963.
KORN G., KORN T. — Electronic Analog Computers. New York, 1952.
LANDAU L., LIFSCITZ E. — Fisica teorica, Vol. I, Meccanica (traduit du russe). Mir, 1975.
LEVINE L. — Methods for Solving Engineering Problems Using Analog Computers. New York, 1964.
PONTRIAGUINE L. — Equations différentielles ordinaires (traduit du russe). Mir, 1972.
SALVADORI M. — Numerical Methods in Engineering. New York, 1952.
SOMMERFELD A. — Mechanik. Leipzig, 1944.
АНИСИМОВ Б. В., ГОЛУБКИН В. Н. — Аналоговые вычислительные машины. « Высшая школа », М., 1972.
АНИСИМОВ Б. В., ЧЕТВЕРИКОВ В. Н. — Основы теории и проектирования ЭВМ. « Высшая школа », М., 1970.
БЕЛЯЕВ Н. М. — Сборник задач по сопротивлению материалов. « Наука », М., 1968.
БЕЛЯЕВ Н. М. — Сопротивление материалов. « Наука », М., 1976.
БЕРЕЗИН И. С., ЖИДКОВ Н. П. — Методы вычислений. « Наука », М., том I, 1959, том II, 1960.
БРУЕВИЧ Н. Г., ДОСТУПОВ Б. Г. — Счётно-решающие устройства. Издание ВВИА им. Жуковского, М., 1954.
ВИТЕНБЕРГ И. М. — Программирование аналоговых вычислительных машин. « Машиностроение », М., 1972.
ДЕМИДОВИЧ Б. П. — Лекции по математической теории устойчивости. « Наука », М., 1967.
ДЕМИДОВИЧ Б. П. и др. — Численные методы анализа. « Наука », 1967.

ЕМЕЛЬЯНОВ С. В. — Системы автоматического управления с переменной структурой. « Наука », М., 1967.
ЕМЕЛЬЯНОВ С. В. и др. — Теория систем с переменной структурой. « Наука », М., 1970.
ЖУКОВСКИЙ Н. Е. — Кинематика, статика, динамика точки. « Оборонгиз », М.-Л., 1939.
ЗАЕЗДНЫЙ А. М. — Сборник задач и упражнений по курсу « Теоретическая радиотехника ». « Связьиздат », Л., 1957.
ЗАСЛАВСКИЙ Ю. Л. — Сборник задач по линейному программированию. « Наука », М., 1969.
КАЛИХМАН И. Л. — Сборник задач по линейной алгебре и программированию. « Высшая школа », М., 1969.
КАМПЕ-НЕММ А. А. — Решение инженерных задач на моделирующих ЭВМ. « Энергия », М., 1970.
КОБРИНСКИЙ Н. Е. — Математические машины непрерывного действия. « Гостехиздат », 1954.
КОГАН Б. Я. — Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. « Физматгиз », М., 1963.
КОШЛЯКОВ Н. С. и др. — Уравнения в частных производных математической физики. « Высшая школа », М., 1970.
ЛЕВЕНСОН Л. Б. — Теория механизмов и машин. « Машгиз », М., 1954.
ЛУЦЕНКО В. А., ФИНЯКИН Л. Н. — Аналоговые вычислительные машины в химии и химической технологии. « Химия », М., 1969.
МЕЛЕНТЬЕВ П. В. — Приближённые вычисления. « Физматгиз », М., 1962.
НОВИКОВ П. С. — Элементы математической логики. « Физматгиз », М., 1959.
ПРЕСНУХИН Л. Н., СОЛОМОНОВ Л. А. и др. — Основы теории и проектирования вычислительных приборов и машин управления. « Высшая школа », М., 1970.
ПРЕСНУХИН Л. Н., ЮДИН Д. Б. и др. — Основы теории и проектирования приборов управления. « Оборонгиз », 1960.
РЫБАШОВ М. Б., ДУДНИКОВ Е. Е. — Градиентные методы решения линейных равенств, неравенств и задач линейного программирования на АВМ. « Советское радио », М., 1970.
ТЕТЕЛЬБАУМ И. М. — Электрическое моделирование. « Физматгиз », 1959.
ЦЫПКИН Я. З. — Адаптация и обучение в автоматических системах. « Наука », М., 1968.
ЧЕСНОКОВ А. А. — Решающие усилители. « Энергия », М., 1969.
ЭЛЬСГОЛЬЦ Л. Э., НОРКИН С. Б., — Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. « Наука », М., 1971.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse : Editions Mir,
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique